TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

5. Übungsblatt für die Übungen vom 11.11.-15.11.2013

homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme, inverse Matrizen

Ü25. (a) Bestimmen Sie zu der unten stehenden Matrix A die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für den Vektor $b = (5, 1, 1, 1)^T$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ für den Vektor $b = (5, -1, 3, r)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$.

(d) Wie hängen die Lösungsmengen von homogenem und inhomogenem Gleichungssystem zusammen?

Ü26. (a) Gegeben sind die reellen Matrizen A_1, A_2, A_3. Untersuchen Sie, welche der Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix. Bestimmen Sie die zu den elementaren Zeilenumformungen gehörenden Elementarmatrizen und bilden Sie jeweils deren (umgekehrtes) Produkt.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_1\, x = b$ mit $b = (5, -11, 0)^T$

(c) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar? Geben Sie die inverse Matrix an.

Ü27. (a) Zeigen Sie, dass jede Matrix höchstens eine Inverse hat.

(b) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A die Beziehung $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und das zugehörige homogene System $Ax = 0$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Lösungsmengen in ein x-y-Koordinatensystem, d.h. ignorieren Sie die z-Koordinate (mathematisch präziser wird das als Projektion auf die x-y-Ebene bezeichnet) und beschreiben Sie, worin sie sich unterscheiden.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar? Berechnen Sie für $a = 3$ die Matrix A^{-1}. Kontrollieren Sie Ihr Rechenergebnis durch eine Probe.

H29. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme. Geben Sie auch die Lösungsmengen der zugehörigen homogenen Systeme an.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 13 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 &= 7 \\ x_1 + 11x_3 + x_4 &= 17 \end{aligned}$$

H30. (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b)* Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$ (und von $a \in \mathbb{R}$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $\frac{1}{a(a-1)}$ auszuklammern.