TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

6. Übungsblatt für die Übungen vom 18.11.-22.11.2013

LU-Faktorisierung, Vektorräume

Hinweis: Die Übungen am Mittwoch, dem 20.11.2013, fallen wegen eines Feiertages aus. Bitte besuchen Sie ausnahmsweise eine Übung an einem anderen Wochentag. Bitte denken Sie daran, auf Ihre Hausaufgabe den Termin Ihrer Übung und Ihren Übungsleiter zu notieren, so dass eine Zuordnung zu Ihrer eigentlichen Gruppe möglich ist.

Ü31. Bestimmen Sie LU-Faktorisierungen der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ und lösen Sie die Gleichungssysteme für die gegebenen rechten Seiten.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ü32. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen in einem Vektorraum V über $\mathbb{K}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle Vektoren $u \in V$ gelten:

(a) $0 \cdot u = o$,

(b) $\lambda \cdot u = o \iff \lambda = 0 \ \vee \ u = o$,

(c) $(-1) \cdot u = -u$.

Hinweis: Was muss hier überhaupt bewiesen werden?

Ü33. Sind die folgenden Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$ Vektorräume über $\mathbb{R}$? Begründen Sie ihre Antwort jeweils. Skizzieren Sie die angegebenen Mengen.

(a) $\{(x,y)^T \mid x \cdot y \geq 0\}$, (b) $\{(x,y)^T \mid x \geq 0\}$, (c) $\{(x,y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
(d) $\{(x,y)^T \mid x^2 + y^2 = 0\}$, (e) $\{(x,y)^T \mid x - y = 0\}$, (f) $\{(x,y)^T \mid x - y = 1\}$.

A34. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ mit folgenden beiden Methoden.

(a) Durch direkte Berechnung der Inversen mit dem Gauß-Algorithmus (analog zu Ü26).

(b) Durch Bestimmung der LU-Zerlegung $A = LU$, der anschließenden Berechnung von U^{-1} und L^{-1} und der Berechnung von $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

H35. Gegeben sei das tridiagonale lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \dots & & & \\ c_2 & d_2 & e_2 & \dots & & & \\ 0 & c_3 & d_3 & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & d_{N-2} & e_{N-2} & 0 \\ & & & \dots & c_{N-1} & d_{N-1} & e_{N-1} \\ & & & \dots & 0 & c_N & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = b,$$

dabei seien alle Einträge reelle Zahlen. Aus der einfachen Struktur der zugehörigen LU-Zerlegung

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & & \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & l_3 & 1 & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & 1 & 0 & 0 \\ & & & \dots & l_{N-1} & 1 & 0 \\ & & & \dots & 0 & l_N & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & e_1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & u_2 & e_2 & \dots & & & \\ 0 & 0 & u_3 & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & u_{N-2} & e_{N-2} & 0 \\ & & & \dots & 0 & u_{N-1} & e_{N-1} \\ & & & \dots & 0 & 0 & u_N \end{bmatrix},$$

läßt sich leicht ein Algorithmus zur Bestimmung der Matrizen L und U aufstellen:

LU-Faktorisierung
Bestimmung von L, U

```
u_1 = a
for i=2,...,N:
    l_i := c_i/u_{i-1}
    u_i = d_i - l_i e_{i-1}
```

Vorwärts-Substitution
zur Lösung von $Ly = b$

```
y_1 = b_1
for i=2,...,N:
    y_i := b_i - l_i y_{i-1}
```

Rückwärts-Substitution
zur Lösung von $Ux = y$

```
x_n = y_n/u_n
for i=N-1,...,1:
    x_i := (y_i - e_i x_{i+1})/u_i
```

Vergewissern Sie sich, dass die LU-Zerlegung und der angegebene Algorithmus korrekt sind.

H36. Implementieren Sie die in H35 vorgestellte Variante zur Lösung eines tridiagonalen linearen Gleichungssystems. Dabei soll für eine gegebene Matrix A und einen Vektor b der Dimension N der Vektor x berechnet werden.

(a) Programmieren Sie den Algorithmus in drei Teilen: LU-Zerlegung, Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen. Überlegen Sie sich, welche Argumente jeweils zu übergeben sind.

(b) Um Ihren implementierten Algorithmus auf Korrektheit zu überprüfen, soll das folgende Gleichungssystem der Dimension N gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & & \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & & \\ 0 & -1 & 2 & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & 2 & -1 & 0 \\ & & & \dots & -1 & 2 & -1 \\ & & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N-2 \\ N-1 \\ N \end{bmatrix}.$$

Die Dimension N soll vom Nutzer eingegeben werden können. Lassen Sie die Ergebnisse für Diskretisierungen mit $N = 10, 100, 500$ jeweils in eine Datei ausgeben und stellen Sie die Lösung als Graphik in `gnuplot` oder `matlab` dar. Für diese Veranschaulichung empfiehlt es sich, in die Datei die laufenden x-Werte, $x_i = ih$, und zugehörigen Lösungswerte u_i tabellarisch einzuschreiben.