TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

7. Übungsblatt für die Übungen vom 25.11.-29.11.2013

Untervektorräume

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt befinden sich 2 Hausaufgaben. Sie können also maximal 4 von den für die Prüfungsvorleistung nötigen 10 Punkten erreichen.

Ü37. Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind:

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = b = 2c\} \leq \mathbb{R}^3$,

(b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^4 = 0\} \leq \mathbb{R}^2$,

(c) $\{(a+b,b^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$,

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$,

(e) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(f) $\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^n p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,|\, \sum_{i=0}^n p_i = a\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$),

(g) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(h) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist regulär}\} \leq \mathbb{R}^{n\times n}$.

Hinweis: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist U ein Untervektorraum von V, schreiben wir $U \leq V$.

Ü38. (a) Wie viele Elemente besitzt der Vektorraum $\mathsf{GF}(2)^3$? Geben Sie alle Elemente an. Visualisieren Sie den Vektorraum durch einen Würfel.

(b) Es seien $v = (0,1,1)$ und $w = (1,1,0)$ zwei Vektoren aus $\mathsf{GF}(2)^3$. Geben Sie alle Vektoren aus dem Spannraum $\text{Span}\{v,w\}$ an.

(c) Wie viele Untervektorräume hat der Vektorraum $\mathsf{GF}(2)^3$? Begründen Sie! Geben Sie zu jeder auftretenden Dimension ein Beispiel an.

(d) Geben Sie (mit Begründung) alle Vektoren $x \in \mathsf{GF}(2)^3$ an, so dass die Menge $\{v,w,x\}$ linear unabhängig ist.

Hinweis: Der Vektorraum $\mathsf{GF}(2)^3$ besteht aus allen 3-Tupeln mit Einträgen aus dem zweielementigen Körper $\mathsf{GF}(2)$. Die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar ist wie in Vektorräumen über $\mathbb{R}$ komponentenweise definiert.

Ü39. (a) Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V über einem Körper $\mathbb{K}$, dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.

(b) Finden Sie zwei Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^3$, deren Vereinigung $U_1 \cup U_2$ kein Vektorraum ist.

A40. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

(a) Wie viele Elemente besitzt der Vektorraum $\mathsf{GF}(3)^3$? Begründen Sie!

(b) Es seien $v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,1,0)$ sowie $w_1 = (2,0,1), w_2 = (0,1,2)$ Vektoren aus $\mathsf{GF}(3)^3$. Geben Sie alle Vektoren $x \in \mathsf{GF}(3)^3$ an, so dass beide Mengen $\{v_1, v_2, x\}$ und $\{w_1, w_2, x\}$ linear unabhängig sind.

(c) Es sei $u = (1,0,0)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Span}\{u, v_2\} \cap \mathrm{Span}\{w_1, w_2\}$.

(d)* Geben Sie alle Untervektorräume an, die den Vektor u enthalten.

Hinweis: Der Vektorraum $\mathsf{GF}(3)^3$ besteht aus allen 3-Tupeln mit Einträgen aus dem dreielementigen Körper $\mathsf{GF}(3)$. Die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar ist wie in Vektorräumen über $\mathbb{R}$ komponentenweise definiert.

A41. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind:

(a)* Die Menge von trigonometrischen Funktionen
$\{f_{a,b} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f = a\sin(x+b)\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems
$Ax = o$: $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = o\} \leq \mathbb{K}^n$.

(c) Die Menge der Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems (mit $b \neq o$)
$Ax = b$: $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \leq \mathbb{K}^n$.

(d) Die Menge aller Polynome, die eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ besitzen:
$\{p \in \mathbb{R}[X] \mid p(1) = 0\} \leq \mathbb{R}[X]$.

H42. Bei der Lösung einer Interpolationsaufgabe geht es darum, ein Polynom $p(x)$ zu finden, dessen Graph gegebene Punkte (x_i, y_i) verbindet. Interpolation einer großen Punktmenge durch Polynome hohen Grades ist nicht immer sinnvoll, weil der Interpolationsfehler zu groß wird. Deshalb verwendet man die Methode der Spline-Interpolation. Für die Computergrafik sind kubische Splinefunktionen besonders wichtig, das sind Polynome dritten Grades auf gegebenen Intervallen, aus denen man eine glatte Kurve zusammensetzen kann. Gegeben ist folgende Wertetabelle:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

Gesucht ist eine Funktion

$$s(x) := \begin{cases} p_0(x), & x_0 \leq x < x_1 \\ p_1(x), & x_1 \leq x < x_2 \\ p_2(x), & x_2 \leq x < x_3 \\ p_3(x), & x_3 \leq x \leq x_4 \end{cases} \quad \text{mit } p_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (i = 0,1,2,3),$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

$$s(x_i) = y_i \text{ für } i = 0,1,2,3,4$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p_{i-1}(x_i) & = & p_i(x_i) \\ p'_{i-1}(x_i) & = & p'_i(x_i) \\ p''_{i-1}(x_i) & = & p''_i(x_i) \end{array}\right\} \text{ für } i = 1,2,3.$$

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$$

Diese Funktion $s(x)$ nennt man natürliche kubische Splinefunktion. Grundlagen zu Splinefunktionen werden im Modul „Mathematische Methoden für Informatiker“ vermittelt.

(a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ für $s(x)$ zur gegebenen Wertetabelle auf.

(b) Die Lösung ist:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x + \frac{4}{3}, & -2 \leq x < -1 \\ -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x + \frac{4}{3}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Führen Sie die Probe durch.