TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

8. Übungsblatt für die Übungen vom 2.12.-6.12.2013

lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Ü43. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(a1) $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$,

(a2) $\{(1,1,0),(2,0,2),(0,2,3)\}$,

(a3) $\{(1,2,3),(2,2,0),(-1,0,3)\}$,

(a4) $\{(1,b),(c,1)\}$,

(a5) $\{(2,-1,1,1),(-3,2,-1,-3),(1,1,2,a)\}$.

Überprüfen Sie nochmals die Vektoren aus den Aufgabenteilen (a1) - (a4) auf lineare Unabhängigkeit, wenn der zugrundeliegende Körper nicht $\mathbb{R}$ sondern $\mathbb{Z}_5$ ist.

(b) Die Vektoren a, b, c aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum seien linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Vektoren ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $-a,\ a+b+b$,

(b2) $a-b,\ b+c,\ b-c$,

(b3) $a-b,\ a-c,\ b-c$.

Ü44. (a) Es sei

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_5 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $E := \{v_1, v_2, \ldots, v_5\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$ mit $B \subseteq E$ an.

(b) Es seien

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ -11 \end{pmatrix},\ u_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $E := \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linear unabhängig ist. Geben Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^4$ mit $E \subseteq B$ an.

Ü45. Geben Sie eine Basis zu den folgenden Vektorräumen an und bestimmen Sie die Dimension.

(a) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -3x_1\}$

(b) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1\}$

(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

(d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_3 = x_4 = x_5\}$

(e) $\left\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} p_i = 0\right\}$

A46. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**

(a) Gegeben ist die Menge $M := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_6 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ in Span $(M \setminus \{v_i\})$ enthalten ist. Gilt $\mathrm{Span}(\{v_2, v_5, v_6\}) = \mathrm{Span}(\{v_3, v_5, v_6\})$?

(b) Gibt es eine reelle Zahl α so, dass der Vektor $u = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ sich als reelle Linearkombination der Vektoren $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ darstellen läßt?

A47.* **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr., Übungstermin und -leiter abgeben.**
Beweisen Sie: Wenn jeder der Vektoren $w_1, w_2, \ldots, w_n$ eine Linearkombination der linear abhängigen Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist, dann sind auch die Vektoren $w_1, w_2, \ldots, w_n$ linear abhängig.

H48. Es seien v_1, v_2, v_3, v_4 paarweise verschiedene Elemente von $\mathbb{R}^4$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie je einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Gilt $v_4 = 3v_2 - v_3$, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(b) Gilt $v_3 = 0$, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(c) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(d) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

(e) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig.

(f) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ Linearkombination der anderen Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3\}$.