TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

9. Übungsblatt für die Übungen vom 9.12.-13.12.2013

komplexe Zahlen

Ü49. (a) Bestimmen Sie jeweils Real- und der Imaginärteil der komplexen Zahlen $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 5i$, $z_3 = \sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$, $z_4 = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_3^2, $\overline{z}_4$ in der kartesischen Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(b) Welche komplexen Zahlen $z = x + yi$ genügen den folgenden Gleichungen?

(i) $|z| + \overline{z} = 1 - 3i$ (ii) $z^2 - 6z + 10 = 0$ (iii) $2z^2 + 4z = iz$

Ü50. (a) Sei $z = -2-i$. Veranschaulichen Sie sich die Lage von z, $\overline{z}$, z^2, $z\,e^{i\frac{3}{2}\pi}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Skizzieren Sie die Mengen aller $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen.

(i) $|z| = 2$ (ii) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ (iii) $|z + 4 - i| \leq 1$

Ü51. (a) Zeigen Sie, dass $z_1 = -1 + 2i$ Lösung der Gleichung $z^2 + 2z + 5 = 0$ ist und geben Sie die zweite Lösung an.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$ und geben Sie diese in der Form $a + bi$ an. Skizzieren Sie die Lösungsmengen in der Gaußschen Zahlenebene.

(i) $z^2 = 2i$ (ii) $z^4 = 1$ (iii) $z^4 = -16$ (iv) $(z - 2 - 3i)^4 = -16$.

H52. (a) $z_0 = 0$ sei eine Lösung von $(z + 2 - 3i)^4 = a$ und a fest, $a \in \mathbb{C}$. Ermitteln Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$.

(b) Gesucht sind alle reellen x, so dass $z = (x + 2 - i)^4$ reell wird.

H53. (a) Berechnen Sie für die gegebenen Gleichungen sämtliche Lösungen in $\mathbb{C}$.

(i) $z^4 + 8z^2 - 9 = 0$ (ii) $|z| + z - \overline{z} = 10 - 16i$

(b) Es sei z_0 jeweils eine Lösung der angegebenen Gleichung und a fest, $a \in \mathbb{C}$. Ermitteln Sie alle weiteren Lösungen.

(i) $z^4 + 2 - i = a$, $z_0 = 2 + 3i$

(ii) $z^6 = a$, $z_0 = \sqrt{3}\,(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

H54. Welche komplexen Zahlen $z = x + yi$ erfüllen jeweils folgende Bedingungen:

(i) $|z - 1| = |z + 3|$ (ii) $|z| + 2\overline{z} = -3 + 6i$ (iii) $\dfrac{|z|}{|z - 2|} < 1$.

Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar.