TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

10. Übungsblatt für die Übungen vom 16.12.-20.12.2013

Basiswechselmatrizen

Ü55. (a) Bestimmen Sie für die folgenden reellen Matrizen den Rang und den Kern:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie jeweils eine Basis des Kerns an, und stellen Sie sämtliche Elemente des Kerns als Linearkombination der Basisvektoren dar. Bestimmen Sie die Dimension des Spaltenraums. Liegt der Vektor $a = (0, 2, -5, -8)^T$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$ von A? Liegt der Vektor $b = (2, -2, 2, -2)^T$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(B)$ von B?

(b) Zählen Sie alle Vektoren aus $(\mathbb{Z}_2)^7$ auf, die im Kern der Matrix C liegen bzw. alle Vektoren aus $(\mathbb{Z}_3)^3$ im Kern der Matrix D. Welche Dimension haben die Spaltenräume von C und D?

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ü56. Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $B_1 = (b_{11}, b_{12}) = ((1,1)^T, (-1,1)^T)$ eine Basis von V. Weiter sei $B_2 = (b_{21}, b_{22})$ gegeben durch

$$b_{21} = 4b_{11} - 3b_{12}, \qquad b_{22} = 1b_{11} + 2b_{12}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B_2 eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen W_{B_1,B_2} und W_{B_2,B_1}

(c) Berechnen Sie die Koordinaten von $v = 5b_{11} - b_{12}$ bezüglich der Basis B_2.

(d) Zeichnen Sie die Vektoren $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, v$ in ein Koordinatensystem bezüglich der Basis B_1 ein. Verifizieren Sie alle erzielten Ergebnisse, in dem Sie alle Vektoren bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ darstellen und mit der graphischen Lösung vergleichen.

Ü57. Es sei $V = \mathbb{R}[X]_3$ und $B = (b_1, b_2, b_3) = (1, 1-x, 1-x^2)$ eine Basis von V. Weiter sei $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ gegeben durch

$$v_1 = b_1 + 3b_2 + 2b_3, \qquad v_2 = 2b_1 + 4b_2 + b_3, \qquad v_3 = -b_1 + b_2 + 4b_3.$$

(a) Zeigen Sie, dass C keine Basis von V ist.

(b) Erweitern Sie eine größte linear unabhängige Menge $D \subseteq C$ zu einer Basis $\tilde{B}$ von V (d.h. ersetzen Sie Vektoren aus C, bis Sie eine Basis erhalten).

(c) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $W_{B,\tilde{B}}$ und $W_{\tilde{B},B}$.

H58. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_5$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Geben Sie die Dimension und eine Basis des Kerns von A an.

(c) Wie viele Elemente hat der Kern? Geben Sie alle Elemente an.

H59. Verbinden Sie die Punkte der Ebene, deren Koordinaten durch die Spaltenvektoren der nachstehenden Matrix gegeben sind, in der Reihenfolge dieser Spalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -1 & -11 & -11 & -8 & -9 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 8 & 11 & 11 & 1 & 4 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie ändert sich die Figur, wenn auf alle Spaltenvektoren die lineare Abbildung

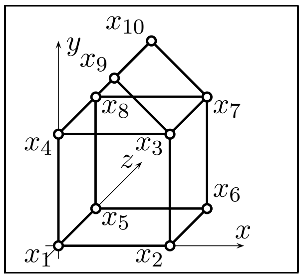
$$f_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit der Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

angewendet wird?

H60. Hinweis: Zur Lösung dieser rechenintensiven Aufgabe können Sie ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

Gegeben sei die rechts im Diagramm skizzierte Figur F mit den Punkten

$x_1 = (0,0,0)^T, x_2 = (1,0,0)^T, x_3 = (1,1,0)^T, x_4 = (0,1,0)^T,$
$x_5 = (0,0,1)^T, x_6 = (1,0,1)^T, x_7 = (1,1,1)^T, x_8 = (0,1,1)^T,$
$x_9 = (0.5,1.5,0)^T, x_{10} = (0.5,1.5,1)^T.$



(a) Skizzieren Sie den Aufriss der Figur, d.h. die Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Die Basis $B_G = \{(1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (0,-1,0)^T\}$ überführt die Figur in den Grundriss. Berechnen Sie den Grundriss, in dem Sie die zugehörige Basiswechselmatrix G bestimmen und die Produkte $G \cdot x_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,10\}$ berechnen. Skizzieren Sie die Projektion der Figur in die x-y-Ebene und überlegen Sie, ob ihr Ergebnis stimmt.

(c) Die Basen

$$B_L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B_S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

liefern eine Darstellung von vorn links bzw. eine isometrische Perspektive. Berechnen Sie analog zu (b) die Bilder der Punkte $x_1, \ldots, x_{10}$ unter den induzierten Basiswechselmatrizen L bzw. S, projizieren Sie die Ergebnisse in die x-y-Ebene und vergleichen Sie mit Ihrer Anschauung.

(d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix Q, die die Koordinaten bezüglich B_S in die Koordinaten bezüglich B_L überführt. Verifizieren Sie ihr Ergebnis durch folgende beide Möglichkeiten der Probe:

   (1) Berechnung der Bilder $Q \cdot y_i$, dabei seien die y_i die Koordinaten der Punkte aus F bezüglich B_L (d.h. $y_i = L \cdot x_i$).

   (2) Durch Berechnung von $L \cdot S^{-1}$. (Warum ist das gleich Q?)