TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

11. Übungsblatt für die Übungen vom 6.1.-10.1.2014

lineare Abbildungen, Darstellungsmatrizen

Ü61. Die Drehung $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene (d.h. $\mathbb{R}^2$) um den Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung. Man kann sich die Abbildung f_α so vorstellen, dass zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $f_\alpha(x)$ entsteht, indem man x gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α dreht.

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix $A = M^B_B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B := E_2$ von $\mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix einer Abbildung, die eine Drehung um 45° bewirkt. Berechnen Sie die Bilder der Punkte

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

Ü62. Zeigen Sie, dass durch

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung gegeben ist. Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität. Geben Sie die darstellende Matrix, den Kern und das Bild von f an. Liegt der Vektor $(0, -3, 3)^T$ im Kern von f?

Ü63. (a) Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn der Kern der Abbildung $\ker(f)$ nur den Nullvektor enthält.

(b) Beweisen Sie: Das Bild $\operatorname{im}(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von W.

H64. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(\binom{1}{3}) = \binom{3}{1}$ und $f(\binom{0}{1}) = \binom{1}{2}$.

(a) Bestimmen Sie $f(\binom{2}{6})$, $f(\binom{0}{3})$ und $f(\binom{2}{7})$.

(b) Bestimmen Sie Kern und Bild von f.

(c) Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix $M^B_B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$ des $\mathbb{R}^2$.

H65. Die Mengen $E := E_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ und $H = \{(1,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$, $F := E_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ und $G = \{(1,1), (1,3)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M^E_H(\mathrm{id})$ und $M^H_E(\mathrm{id})$ und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$. Verifizieren Sie, dass durch jede der Matrizen der Vektor $(10, 9, 8)$ auf den Vektor $(19, 17)$ abgebildet wird.

Hinweis: Mit $M_D^B(g)$ bezeichnen wir die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $g : V \to W$ bezüglich der Basen B in V und D in W. Die Abbildung id ist die identische Abbildung, eine Darstellungsmatrix $M_D^B(\mathrm{id})$ ist also eine Basiswechselmatrix (von der Basis B in die Basis D).

H66. (a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\dim(\ker(A)) \neq 0$ und $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{K}^m$.

(b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\dim(\ker(A)) = 0$ und einen Vektor $v \in \mathbb{K}^m$ mit $v \notin \mathrm{Col}(A)$.

(c) Beweisen Sie: ist $A \subseteq \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, dann gilt $\dim(\ker(A)) \neq 0$ genau dann, wenn ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $v \notin \mathrm{Col}(A)$ existiert.