TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

12. Übungsblatt für die Übungen vom 13.1.-17.1.2014

Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

Ü67. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A_1, A_2, A_3.

(b) Berechnen Sie die Determinanten von A_1^T, A_1^2, A_2^{-1}, $2A_2$, $(A_1A_2)^{-1}$.

(c) Überführen Sie die Matrix B mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix und ermitteln Sie deren Determinante.

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix C mit dem Entwicklungssatz.

Ü68. (a) Es sei $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $v_1 = (1, 1)$ ein Eigenvektor von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass $\lambda_2 = 1$ ein Eigenwert von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $E_M(\lambda_2)$.

(b) Bestimmen Sie für die gegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jeweils das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und eine Basis für jeden Eigenraum. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ü69. Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^T)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ gilt, falls A invertierbar ist.

(c) Es seien n ungerade und $A = -A^T$. Bestimmen Sie die Determinante von A.

Hinweis: Sie können zum Beweis die Gleichung $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$ verwenden.

H70. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

H71. Gesucht sind alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

H72.* Gibt es Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit:

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BB^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CC^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DD^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren. Nutzen Sie dazu die Determinantenfunktion und deren Eigenschaften.