TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

13. Übungsblatt für die Übungen vom 20.1.-24.1.2014

Eigenwertprobleme, Diagonalisierung von Matrizen

Ü73. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $g = \mathbb{R}v$ mit $v = \binom{2}{1} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung geometrisch und überlegen Sie damit, welche Eigenwerte f hat und was die dazugehörigen Eigenräume sind. Geben Sie eine Basis $B' = (u_1, u_2)$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von f an.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A := M_B^B(f)$ bzgl. der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D := M_{B'}^{B'}(f)$ bzgl. der Basis $B' = (u_1, u_2)$.

(d) Berechnen Sie eine reguläre Matrix S, so dass $D = S^{-1}AS$ gilt. Ist S eindeutig bestimmt?

Ü74. Entscheiden Sie, jeweils für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ob die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ü75. (a) Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A alle Eigenwerte, finden Sie jeweils eine Basis aus Eigenvektoren von A und eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie jeweils die Matrix $S^{-1}AS$ an.

(i) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Von den folgenden Matrizen M sind die angegebenen Eigenvektoren bekannt. Geben Sie jeweils alle Eigenwerte und die Dimension der zugehörigen Eigenräume an. Sind diese Matrizen diagonalisierbar?

- $M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

H76. Es sei $M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Matrix über dem Körper $\mathbb{C}$. Die Vektoren $v_1 = (i, -1, 1)^T$, $v_2 = (i, 0, 1)^T$ sind Eigenvektoren der Matrix M.

(a) Welche Eigenwerte hat die Matrix M und welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume?

(b) Bilden die Basisvektoren der Eigenräume eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{C}^3$?

(c) Welchen Wert hat die Determinante von M?

(d) Sind die Spaltenvektoren der Matrix M linear unabhängig und welchen Rang hat M?

(e) Geben Sie den Kern von M an.

(f) Durch die Matrix M ist eine lineare Abbildung gegeben. Ist diese Abbildung injektiv?

(g) Welche Eigenwerte hat M^{-1}?

H77. Die Drehung d_α der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α ist eine lineare Abbildung, die durch die Darstellungsmatrix $M_{E_2}^{E_2}(d_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschrieben wird (siehe Skript zur 10. Vorlesung).

(a) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und deren Eigenräume. Für welche Winkel α ist d_α diagonalisierbar?

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und deren Eigenräume. Bestimmen Sie eine zu $M_{E_2}^{E_2}(d_\alpha)$ ähnliche Diagonalmatrix D und eine geeignete Matrix S von Eigenvektoren und verifizieren Sie die Gleichung $M_{E_2}^{E_2}(d_\alpha) = SDS^{-1}$.

H78. Diagonalisieren Sie die Matrix $M := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ und über dem Körper GF(5), falls dies möglich ist. Geben Sie jeweils den Kern und die Determinante von M an.