TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Dr. A. Noack, Dr. C. Zschalig

Mathematik für Informatiker (Modul INF-B110), Teil Lineare Algebra, Wintersemester 2013/14

15. Übungsblatt für die Übungen vom 3.2.-7.2.2014

Orthogonalisierungsverfahren, orthogonale Projektion

Ü85. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, um aus den Vektoren

$$v_1 := (0,2,1,0)^T, v_2 := (1,-1,0,0)^T, v_3 = (1,1,1,0)^T, v_4 := (1,2,0,-1)^T$$

eine Orthogonalbasis von $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ zu konstruieren. Normieren Sie diese Basis.

Ü86. Eine geneigte Stahlplatte, die in den Punkten $v_1 = (1,0,2)^\top \in \mathbb{R}^3$ und $v_2 = (0,1,1)^\top \in \mathbb{R}^3$ aufliegt, soll durch eine Verstrebung am Punkt $y = (-5,-2,6)^\top$ so befestigt werden, dass die Platte gleichzeitig den Punkt $(0,0,0)^\top$ berührt (die Dicke der Platte wird vernachlässigt).

An welchem Punkt $u \in \mathbb{R}^3$ muss die Verstrebung an der Platte befestigt werden, damit die Verstrebung so kurz wie möglich ist. Wie lang muss die Verstrebung mindestens sein?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst eine Orthogonalbasis für die von der Stahlplatte definierten Ebene U und bestimmen Sie anschließend die orthogonale Projektion von y auf U.

Ü87. Zeigen Sie: Zwei von Null verschiedene, orthogonale Vektoren sind linear unabhängig.

H88. Verifizieren Sie, dass die beiden Vektoren $u_1 = (-7,1,4)^T$ und $u_2 = (-1,1,-2)^T$ orthogonal sind. Nutzen Sie dies aus, um die Orthogonalprojektion von $v = (-9,1,6)^T$ auf die durch u_1 und u_2 erzeugte Ebene zu berechnen.

H89. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren für den von den Vektoren

$$v_1 = (3,1,-1,3)^\top,\ v_2 = (-5,1,5,-7)^\top \text{ und } v_3 = (4,4,2,2)^\top$$

aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$.

H90. (a) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt $\det A = 1$ oder $\det A = -1$.

(b) Zeigen Sie: Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wieder orthogonal.

(c) Zeigen Sie: Das Inverse einer orthogonalen Matrix ist wieder orthogonal.