TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker , Wintersemester 2014/15

1. Übungsblatt für die Übungen vom 20.10.-24.10.2014

Mengen, Logik

Ü1. Gegeben seien die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, & B &= \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} :\ x = 2^k\}, & D &= \{x \in \mathbb{N} \mid \mid x - 2 \mid \leq 1\}, \\ E &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } 30\}, & F &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 13\}, \\ G &= F \cap C, & H &= A \cup B \cup E. \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.

(b) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm der Menge $\{A, B, C, D\}$.

(c) Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an. Zeichnen Sie ein Diagramm der geordneten Menge $(\{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \subseteq)$.

Ü2. Gegeben seien die folgenden Aussagen über $\mathbb{N}$:

$t_i(n) :\Longleftrightarrow$ n ist durch i teilbar,
$s(n) :\Longleftrightarrow$ die letzte Ziffer von n (im Dezimalsystem) ist 5.

Untersuchen Sie für jeden der folgenden Terme, ob er mit der Quantifizierung $\forall n$ bzw. $\exists n$ eine wahre Aussage darstellt.

(a) $(t_3(n) \wedge t_5(n)) \iff t_{15}(n)$, (b) $\neg t_3(n) \vee \neg t_5(n) \vee t_{15}(n)$,
(c) $s(n) \implies (t_{15}(n) \wedge \neg t_2(n))$, (d) $s(n) \implies (t_{15}(n) \wedge t_2(n))$.

Ü3. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R bzw. $\sim$ auf der jeweiligen Grundmenge A Äquivalenzrelationen sind. Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen.

(a) $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $R = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 1)\} \cup \Delta_A$,

(b) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2k\pi$,

(c) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y :\Longleftrightarrow |x - y| < \pi$,

(d) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ad = bc$.

Geben Sie zur Relation R die „Kreuztabelle“ und die zugehörige Partition/Zerlegung an.

Hinweis: Die Relation $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ bezeichnet die identische Relation auf A.

A4. **Hausaufgabe, bitte bis 29.10.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Gegeben seien die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 5| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 5 \leq 9\}$ und $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 > 3x^2\}$. Berechnen Sie

$$A \cup B, \quad A \cap C, \quad C \setminus A, \quad A \,\Delta\, B, \quad (A \setminus B) \setminus C \text{ und } A \setminus (B \setminus C).$$

(b) Ist die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : m > n \wedge (k \geq m \vee k \leq n)$ wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

H5. (a) Geben Sie Beispiele von Mengen A, B, C, D an, für welche die Gleichung $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$ verletzt ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ stets richtig ist. Argumentieren Sie sorgfältig!

H6. Ein Gerät kann je nach Kombination der Baugruppen A, B, C, D in verschiedenen Varianten hergestellt werden. Dabei sind jedoch folgende Bedingungen sämtlich einzuhalten:

- Die Baugruppen A und D können, wenn überhaupt, nur gemeinsam auftreten.
- Der Einbau von D macht den Einbau von C erforderlich.
- Eine Variante, die A nicht enthält, muss B enthalten.
- B und D schließen sich gegenseitig aus.

Stellen Sie jede der vier Bedingungen als einen (möglichst einfachen) aussagenlogischen Term dar und ermitteln Sie alle möglichen Bauvarianten.