TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

2. Übungsblatt für die Übungen vom 27.10.-30.10.2014

Relationen, Funktionen

Ü7. (a) Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $A = \{a, b, c\}$ an.

(b) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. fünfelementigen Menge?

(c)* Bestimmen Sie alle Ordnungsrelationen auf A.

Hinweis: Sie können ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R := \{[m]_R \mid m \in M\}$ bildet eine Partition/Zerlegung von M.

Ü8. Auf der Menge $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13\}$ wird die Teilbarkeitsrelation $|$ betrachtet.

(a) Geben Sie die Relation als Menge konkreter Paare an.

(b) Zeigen Sie, dass $|$ eine Ordnungsrelation auf A ist. Zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm.
Ist die Relation linear?

(c) Bestimmen Sie alle minimalen Elemente von A bzgl. $|$. Gibt es ein kleinstes?

Ü9. Beschreiben Sie die folgenden Funktionen in einer geeigneten Weise (Wertetabelle, Aufzeichnen im Koordinatensystem, ...). Untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $f_a : \{0, 1, \ldots, 9\} \to \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad f_a(m) = n :\iff n$ ist die letzte Ziffer von $a \cdot m$ (für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$),

(b) $g_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g_a(z) := a^z$ (für beliebiges $a \in \mathbb{N}$),

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = sin(x)$,

(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = x^3 + x$,

(e) $m_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad m_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$. (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$)

A10. **Hausaufgabe, bitte bis 5.11.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Eine *Quasiordnung* $\lesssim$ auf einer Menge M ist eine reflexive und transitive Relation. Zeigen Sie, dass die durch

$$S := \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid \max\{|x_1|, |y_1|\} \leq \max\{|x_2|, |y_2|\}\}.$$

definierte Relation $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ eine Quasiordnung ist. Zeigen Sie, dass S weder eine Äquivalenzrelation noch eine Ordnungsrelation ist.

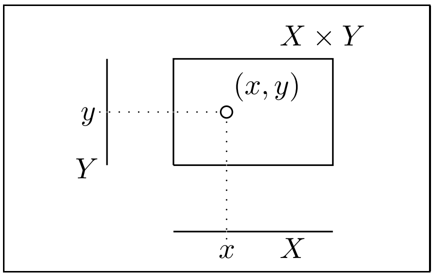
Auf einer Quasiordnung lässt sich durch $a \sim b :\iff a \lesssim b \wedge b \lesssim a$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definieren. Beschreiben Sie die so durch S erzeugten Äquivalenzklassen auf $\mathbb{R}^2$ und skizzieren Sie sie in ein Koordinatensystem.

(b) Für zwei beliebige Parameter $a, b \in \mathbb{N}$ sei durch $f_{a,b}(x) := ax + b$ eine Funktion $f_{a,b} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erklärt. Untersuchen Sie, für welche Werte von a und b die Funktion $f_{a,b}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist.

Das kartesische Produkt

$$X \times Y := \{(a, b) \mid a \in X \text{ und } b \in Y\}$$

zweier Mengen X und Y und deren Elemente $(x, y) \in X \times Y$ sollen wie in der Skizze dargestellt werden („Koordinatendarstellung“):



Damit ist jede Relation $\varrho \subseteq X \times Y$, insbesondere der Graph $f^\bullet = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ jeder Abbildung $f : X \to Y$, im Prinzip skizzierbar. Man zeichne auf diese Weise Diagramme von Graphen von Abbildungen f mit den folgenden Eigenschaften:

H11. (i) f surjektiv, aber nicht injektiv

(ii) f injektiv, aber nicht surjektiv

(iii) f bijektiv

(iv) f konstant

(v) f nicht surjektiv und nicht injektiv

(vi) $X = Y$ und $f = id_X$

(vii) $f[X] := \{f(x) \,|\, x \in X\}$ besteht aus genau zwei Elementen.

H12. Geben Sie Beispiele für Relationen an, die zwei der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllen, nicht jedoch die dritte.