Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

3. Übungsblatt für die Übungen vom 3.11.-7.11.2014

Auswahlaxiom, komplexe Zahlen

Ü13. Seien A, B Mengen mit $A \neq \emptyset$ und sei $f\colon A \to B$ injektiv. Zeigen Sie, dass dann eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ existiert. Benötigen Sie für den Beweis das Auswahlaxiom?

Ü14. (a) Sei $z = -2 - \mathrm{i}$. Veranschaulichen Sie sich die Lage von z, $z + z$, $\overline{z}$, z^2, $z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Skizzieren Sie die Mengen aller $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen.

(i) $|z| = 2$ (ii) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ (iii) $|z + 4 - \mathrm{i}| \leq 1$

(c) Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $4e^{i\frac{17}{6}\pi}$ und i^7.

(d) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, so dass die Gleichung $z^4 = 5 + 12i$ gilt.

Ü15. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$. Dann sind bekanntlich $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ reell und die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 + pz + q = 0$. Verallgemeinern Sie dieses Resultat für beliebige $p, q \in \mathbb{C}$ und komplexe Lösungen.

A16. **Hausaufgabe, bitte bis 12.11.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Berechnen Sie $(2 + 5i)(3 + 3i)$, $(i + 1)^5$ und $\frac{-5i}{2+i}$ und geben Sie das Ergebnis jeweils in algebraischer Darstellung an.

(b) Zeigen Sie: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : (z_1 z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0)$.

(c) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 - 1 = 0$.

H17. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{N}, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge ist.

H18. Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

- $z = re^{i\varphi} \Longrightarrow \overline{z} = re^{-i\varphi}$,
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{z\overline{z}} = |z|$,
- Falls $z \neq 0$, dann $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$.