Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

4. Übungsblatt für die Übungen vom 10.11.-14.11.2014

Gruppen, Körper

Ü19. Die *Quaternionengruppe* $\underline{Q_8}$ besteht aus den Elementen $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$; die Gruppenoperation $\circ$ ist durch die folgenden Gleichungen eindeutig festgelegt:

(1) $\forall q \in Q_8 : 1 \circ q = q \circ 1 = q$	(2) $\forall q \in Q_8 : -1 \circ q = q \circ -1 = -q$
(3) $i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1$	(4) $i \circ j = j \circ -i = k$
(5) $j \circ k = k \circ -j = i$	(6) $k \circ i = i \circ -k = j$
(7) $\forall q \in Q_8 : -(-q) = q$	

(a) Bestimmen Sie $i \circ k$ und $j \circ i$; begründen Sie dabei Ihre Umformungsschritte durch die obigen Gleichungen.

(b) Stellen Sie die Gruppentafel auf.

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Quaternionengruppe.

Ü20. (a) Für $n \in \mathbb{N}_+$ und ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ wird durch die Festsetzung

$$x \equiv y \ (\operatorname{mod} n) :\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{Z} : x - y = \lambda n$$

eine Äquivalenzrelation $\pmod n$ auf der Menge $\mathbb{Z}$ definiert. Bestätigen Sie das! (x, y heißen dann *kongruent modulo n*.) Die Äquivalenzklassen $[x]$ werden auch als *Restklassen* bezeichnet. Warum? Als besonders „guten" Repräsentanten einer Restklasse wird meist die kleinste nichtnegative ganze Zahl aus $[x]$ gewählt und mit $(x \mod n)$ bezeichnet. Was ist die Anzahl der (paarweise verschiedenen) Restklassen modulo n, d.h. die Mächtigkeit von $\mathbb{Z}/_{(\operatorname{mod} n)}$?

(b) Welche der folgenden Restklassen stimmen modulo 7 überein?

$$[0], [13], [-321], [91], [57], [-1], [\sqrt{2}].$$

(c) In der Menge $\mathbb{Z}/_{(\operatorname{mod} n)}$ wird durch „repräsentantenweises" Rechnen eine Addition $+$ bzw. Multiplikation $\cdot$ erklärt. Rechtfertigen Sie diese Vorgehensweise durch den Nachweis, dass sie unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. (Was muss dabei gezeigt werden?)

Ü21. Stellen Sie für $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ die Tafeln für Addition $x + y := (x + y \mod n)$ und Multiplikation $x \cdot y := (x \cdot y \mod n)$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ auf. Begründen Sie (ohne detaillierten Beweis), dass $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ für $n \in \{2, 3, 5\}$ jeweils die Körpereigenschaften erfüllt.
Warum trifft das für $n = 4$ nicht zu?

A22. **Hausaufgabe, bitte bis 19.11.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Geben Sie die Operationstafeln der Gruppen $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, \cdot)$ an. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen beiden Gruppen an.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $E_n = \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln (vgl. Beispiel 2.13 aus der Vorlesung). Zeigen Sie, dass $(E_n, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass E_n *abgeschlossen* unter $\cdot$ ist, d.h. dass $\cdot$ zwei Elemente aus E_n tatsächlich wieder in E_n abbildet.

H23*. In dieser Aufgabe soll der Satz von Cayley

„Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.“

(vgl. 3.27 aus der Vorlesung) in mehreren Schritten bewiesen werden. Sei dazu $(G, *)$ eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_a \colon G \to G : x \mapsto a * x$ für jedes $a \in G$ eine bijektive Abbildung ist. Dies bedeutet: $\forall a \in G : \lambda_a \in S_G$.

(b) Wegen (a) ist die Abbildung $\varphi \colon G \to S_G \colon a \mapsto \lambda_a$ wohldefiniert. Zeigen Sie, dass φ ein Homomorphismus von $(G, *)$ nach $(S_G, \circ)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\varphi[G], \circ)$ eine Untergruppe von $(S_G, \circ)$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass φ injektiv ist.

(e) Schlussfolgern Sie, dass $\varphi \colon G \to \varphi[G]$ ein Isomorphismus von $(G, *)$ nach $(\varphi[G], \circ)$ ist.

H24. Sei $\underline{H} = (H, \cdot)$ eine Gruppe und sei $\mathrm{Aut}(\underline{H})$ die Menge der Automorphismen von $\underline{H}$. Dann ist $\underline{Aut}(\underline{H})$ eine Untergruppe von $\underline{S}_H$ (der Gruppe aller Permutationen auf H).

Die mit einem * bezeichneten Aufgaben sind schwerer.