Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

5. Übungsblatt für die Übungen vom 17.11.-21.11.2014

Vektorräume, lineare Unabhängigkeit

Auf den Übungsblättern stehen oft Zeilenvektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ statt Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Ü25. Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind:

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = b = 2c\} \leq \mathbb{R}^3$,

(b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^4 = 0\} \leq \mathbb{R}^2$,

(c) $\{(a+b, b^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$,

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$,

(e) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \leq \mathbb{R}^\mathbb{R}$,

(f) $\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^n p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,|\, \sum_{i=0}^n p_i = a\} \leq \mathbb{R}^\mathbb{R}$ (für einen Parameter $a \in \mathbb{R}$),

(g) $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \,|\, \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\} \leq \mathbb{R}^\mathbb{R}$.

Hinweis: $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist U ein Untervektorraum von V, schreiben wir $U \leq V$.

Ü26. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$).

(a1) $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$,

(a2) $\{(1,1,0),(2,0,2),(0,2,3)\}$,

(a3) $\{(1,2,3),(2,2,0),(-1,0,3)\}$,

(a4) $\{(1,b),(c,1)\}$,

(a5) $\{(2,-1,1,1),(-3,2,-1,-3),(1,1,2,a)\}$.

Überprüfen Sie nochmals die Vektoren aus den Aufgabenteilen (a1) - (a4) auf lineare Unabhängigkeit, wenn der zugrundeliegende Körper nicht $\mathbb{R}$ sondern $\mathbb{Z}_5$ ist.

(b) Die Vektoren a, b, c aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum seien linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Vektoren ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $-a$, $a+b+b$,

(b2) $a-b$, $b+c$, $b-c$,

(b3) $a-b$, $a-c$, $b-c$.

Ü27. (a) (i) Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V über einem Körper $\mathbb{K}$, dann ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.

(ii) Finden Sie zwei Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^3$, deren Vereinigung $U_1 \cup U_2$ kein Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie Proposition 4.16 aus der Vorlesung: Ist $M \subseteq V$ linear unabhängig und $x \in V \setminus \operatorname{Lin} M$, dann ist $M \cup \{x\}$ linear unabhängig.

A28. **Hausaufgabe, bitte bis 26.11.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Wie viele Elemente besitzt der Vektorraum $\mathsf{GF}(3)^3$? Begründen Sie!

(b) Es seien $v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,1,0)$ sowie $w_1 = (2,0,1), w_2 = (0,1,2)$ Vektoren aus $\mathsf{GF}(3)^3$. Geben Sie alle Vektoren $x \in \mathsf{GF}(3)^3$ an, so dass beide Mengen $\{v_1, v_2, x\}$ und $\{w_1, w_2, x\}$ linear unabhängig sind.

(c) Es sei $u = (1,0,0)$. Bestimmen Sie $\operatorname{Lin}\{u, v_2\} \cap \operatorname{Lin}\{w_1, w_2\}$.

(d)* Geben Sie alle Untervektorräume an, die den Vektor u enthalten.

Hinweis: Der Vektorraum $\mathsf{GF}(3)^3$ besteht aus allen 3-Tupeln mit Einträgen aus dem dreielementigen Körper $\mathsf{GF}(3) \cong (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$. Die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar ist wie in Vektorräumen über $\mathbb{R}$ komponentenweise definiert.

H29. Sei $\mu \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *μ-periodisch*, wenn $f(x) = f(x + \mu)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $V_\mu := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mu\text{-periodisch}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $W := \operatorname{Lin}(\{\sin nx \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos mx \mid m \in \mathbb{N}\})$ ein Untervektorraum von $V_{2\pi}$ ist.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, was im einzelnen bewiesen werden muss; reicht es aus, wenn man zeigt, dass $\sin nx$ und $\cos mx$ zu $V_{2\pi}$ gehören? Mit $\sin nx$ bzw. $\cos mx$ werden hier die Funktionen $x \mapsto \sin nx$ bzw. $x \mapsto \cos mx$ bezeichnet. Man nennt W auch den Vektorraum der trigonometrischen Polynome.)

(c) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten, ohne „Element von“ zu sagen. Welche der Aussagen ist richtig? (Beweis oder Widerlegung)

(c1) $\forall f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}\ \exists \mu \in \mathbb{R} : f \in V_\mu$,

(c2) $\exists \mu \in \mathbb{R}\ \forall f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f \in V_\mu$,

(c3) $\forall \mu \in \mathbb{R} : V_\mu = V_{-\mu}$.

H30. Es seien v_1, v_2, v_3, v_4 paarweise verschiedene Elemente von $\mathbb{R}^4$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie je einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Gilt $v_4 = 3v_2 - v_3$, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(b) Gilt $v_3 = 0$, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(c) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig.

(d) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

(e) Ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig, dann ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig.

(f) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ Linearkombination der anderen Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3\}$.