Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

6. Übungsblatt für die Übungen vom 24.11.-28.11.2014

Basis, Dimension, lineare Abbildungen

Ü31. Geben Sie eine Basis zu den folgenden Vektorräumen an und bestimmen Sie die Dimension.

(a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -3x_1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1\}$

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_3 = x_4 = x_5\}$

(e) $\left\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^n p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^n p_i = 0\right\}$

Ü32. Sei V endlich dimensional, $U, W \leq V$. Zeigen Sie, dass dann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

gilt. Mit anderen Worten: Beweisen Sie den Dimensionssatz.

Ü33. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(f)$ und entscheiden Sie, ob f injektiv oder surjektiv ist.

(c) Geben Sie weiterhin eine Basis vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $f[V]$ an.
Hinweis: Zur Bestimmung einer Basis von $f[V]$ bietet es sich an, einfach eine geeignet große Menge linear unabhängiger Vektoren aus $f[V]$ zu finden.

A34. **Hausaufgabe, bitte bis 3.12.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $P_n := \{p \in \mathbb{R}[X]_n \mid p(1) = 0\} \leq \mathbb{R}[X]$ aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n, die eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ besitzen, einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[X]$ aller Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$ bildet.

(b) Geben Sie eine Basis von P_n an (Sie müssen natürlich auch beweisen, dass die von Ihnen gefundene Menge tatsächlich eine Basis ist) und bestimmen Sie die Dimension von P_n.

Hinweis: Sie können folgende aus der Schule bekannte Äquivalenz verwenden:
$p(a) = 0 \iff \exists q(x) \in \mathbb{R}[X] : p(x) = (x - a)q(x)$.

H35. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ und der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jeweils nicht endlich dimensional sind.

Hinweis: Es bietet sich an, für $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine unendlich große Menge linear unabhängiger Vektoren zu finden (warum reicht das?) und für den $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{R}$ ein Argument mit Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit zu verwenden.

H36. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann linear ist, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(v) = r \cdot v$.