TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

7. Übungsblatt für die Übungen vom 1.12.-5.12.2014

lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen

Ü37. Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Matrizenausdrücke: AB, BA, AD, $A(B+C)$, $AB+AC$, A^TB^T, $(BA)^T$, C^2, D^TB.

Berechnen Sie A^8 für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ü38. Die Mengen $E := E_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ und $H = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^3$, $F := E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ und $G = \{(1,1),(1,3)\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M_H^E(\mathrm{id})$ und $M_E^H(\mathrm{id})$ und überprüfen Sie, dass diese Matrizen zueinander invers sind.

(b) Berechnen Sie für die durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ gegebene lineare Abbildung f die Darstellungsmatrizen $M_F^E(f)$, $M_G^E(f)$, $M_F^H(f)$ und $M_G^H(f)$. Verifizieren Sie, dass durch jede der Matrizen der Vektor $(10,9,8)$ auf den Vektor $(19,17)$ abgebildet wird.

Hinweis: Mit $M_D^B(g)$ bezeichnen wir die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $g : V \to W$ bezüglich der Basen B in V und D in W. Die Abbildung id ist die identische Abbildung, eine Darstellungsmatrix $M_D^B(\mathrm{id})$ ist also eine Basiswechselmatrix (von der Basis B in die Basis D).

Ü39. (a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Zeigen Sie, dass durch $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \ x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung definiert wird.

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Sei weiterhin $f \colon V \to W$ linear und $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ die zu f gehörige Matrix bzgl. zweier geordneter Basen B, C. Zeigen Sie $\dim \ker f = \dim\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.

A40. **Hausaufgabe, bitte bis 10.12.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Geben Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese Formel für A^n durch vollständige Induktion über n.

Hinweis: Für die Formulierung der Lösung könnten z.B. *Binomialkoeffizienten* hilfreich sein.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f\left(\binom{1}{3}\right) = \binom{3}{1}$ und $f\left(\binom{0}{1}\right) = \binom{1}{2}$.

(i) Bestimmen Sie $f\left(\binom{2}{6}\right)$, $f\left(\binom{0}{3}\right)$ und $f\left(\binom{2}{7}\right)$.

(ii) Bestimmen Sie Kern und Bild von f.

(iii) Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix $M_B^B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$ des $\mathbb{R}^2$.

H41. Die Drehung $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene (d.h. $\mathbb{R}^2$) um den Koordinatenursprung um einen Winkel α ist eine lineare Abbildung. Man kann sich die Abbildung f_α so vorstellen, dass zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $f_\alpha(x)$ entsteht, indem man x gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α dreht.

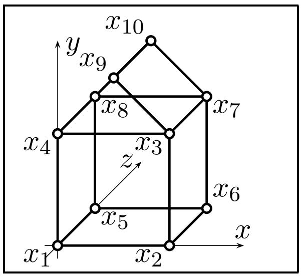
(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix $A = M_B^B(f)$ von f bezüglich der Standardbasis $B := E_2$ von $\mathbb{R}^2$ an. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix einer Abbildung, die eine Drehung um 45° bewirkt. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $(1,0), (3,0), (1,2), (3,2), (2,3)$ und überzeugen Sie sich mit einer Skizze von der Richtigkeit Ihrer Rechnung.

H42. Hinweis: Zur Lösung dieser rechenintensiven Aufgabe können Sie ausnahmsweise elektronische Hilfsmittel verwenden.

Gegeben sei die rechts im Diagramm skizzierte Figur F mit den Punkten

$x_1 = (0,0,0)^T, x_2 = (1,0,0)^T, x_3 = (1,1,0)^T, x_4 = (0,1,0)^T,$
$x_5 = (0,0,1)^T, x_6 = (1,0,1)^T, x_7 = (1,1,1)^T, x_8 = (0,1,1)^T,$
$x_9 = (0.5, 1.5, 0)^T, x_{10} = (0.5, 1.5, 1)^T.$



(a) Skizzieren Sie den Aufriss der Figur, d.h. die Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Die Basis $B_G = \{(1,0,0)^T, (0,0,1)^T, (0,-1,0)^T\}$ überführt die Figur in den Grundriss. Berechnen Sie den Grundriss, in dem Sie die zugehörige Basiswechselmatrix G bestimmen und die Produkte $G \cdot x_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, 10\}$ berechnen. Skizzieren Sie die Projektion der Figur in die x-y-Ebene und überlegen Sie, ob ihr Ergebnis stimmt.

(c) Die Basen

$$B_L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B_S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

liefern eine Darstellung von vorn links bzw. eine isometrische Perspektive. Berechnen Sie analog zu (b) die Bilder der Punkte $x_1, \ldots, x_{10}$ unter den induzierten Basiswechselmatrizen L bzw. S, projizieren Sie die Ergebnisse in die x-y-Ebene und vergleichen Sie mit Ihrer Anschauung.

(d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix Q, die die Koordinaten bezüglich B_S in die Koordinaten bezüglich B_L überführt. Verifizieren Sie ihr Ergebnis durch folgende beide Möglichkeiten der Probe:

(1) Berechnung der Bilder $Q \cdot y_i$, dabei seien die y_i die Koordinaten der Punkte aus F bezüglich B_L (d.h. $y_i = L \cdot x_i$).

(2) Durch Berechnung von $L \cdot S^{-1}$. (Warum ist das gleich Q?)