TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

8. Übungsblatt für die Übungen vom 8.12.-12.12.2014

Lineare Gleichungssysteme

Ü43. (a) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

(i) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 12 \end{aligned}$$
(ii) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$
(iii) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 12 \end{aligned}$$

(b) Für welchen Wert für r besitzen die drei Geraden $x - 4y = -1$, $2x - y = 5$ sowie $-x - 3y = r$ einen gemeinsamen Schnittpunkt? Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt auch geometrisch.

(c) Für welche reellen Werte von r sind die folgenden Gleichungssysteme lösbar? Ermitteln Sie die Lösungsmenge.

(i) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -10 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + rx_3 &= 8 \end{aligned}$$
(ii) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= r \end{aligned}$$

Ü44. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$ ein affiner Unterraum. Zeigen Sie: Sind $U_1, U_2 \subseteq V$ lineare Unterräume und $v_1, v_2 \in V$ mit $M = U_1 + \{v_1\} = U_2 + \{v_2\}$, dann gilt $U_1 = U_2$.
Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass der zu einem affinen Unterraum gehörige lineare Unterraum eindeutig bestimmt ist

Ü45. (a) Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Beweisen Sie die Gleichung $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

(b) Für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{r\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

(c) Eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $M^\top = M$ gilt und *schiefsymmetrisch*, falls $M^\top = -M$ gilt.
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie, dass $AA^\top$ eine symmetrische Matrix ist. Zeigen Sie für den Fall $m = n$, dass $A + A^\top$ eine symmetrische und $A - A^\top$ eine schiefsymmetrische Matrix ist.

A46. **Hausaufgabe, bitte bis 17.12.2014 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**
Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1&2&0&1 \\ 2&3&0&1 \\ 3&4&1&0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$.

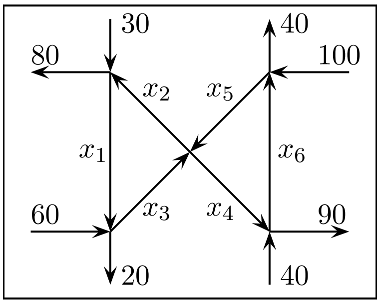
(a) Ist $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ein lösbares LGS?

(b) Existiert $b \in \mathbb{R}^3$, so dass das LGS $Ax = b$ mehrere Lösungen hat?

(c) Sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Dimension des affinen Unterraums $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\}$.

(d) Lösen Sie das LGS $Ax = b$ für $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

H47. (a) Ermitteln Sie die Verkehrsströme in den einzelnen Teilstücken des angegebenen Streckennetzes. Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Lösungsmenge. Geben Sie für die Teilstücke x_2, x_3, x_4 jeweils die minimale nichtnegative Lösung an.



(b) Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die Kupfer, Silber und Gold in in der Tabelle angegebenen Prozentsätzen enthalten. Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält? Wenn ja, so geben Sie eine solche Mischung an.

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

H48. (a)* Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \times n$-Matrizen ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) über $\mathbb{R}$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $A^2 + B^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = B = 0$

(iii) $BA = 0 \;\Rightarrow\; (AB)^2 = 0$

(b) Es seien A eine $m \times r$-Matrix und B eine $r \times n$-Matrix (das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?