TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

9. Übungsblatt für die Übungen vom 15.12.-19.12.2014

Matrixinvertierung, Determinanten

Ü49. (a) Sind die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ invertierbar? Geben Sie die inverse Matrix an, falls möglich.

$$\text{(a1)}\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(a2)}\ A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(a3)}\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Untersuchen Sie für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$ sowie $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(5)$, ob die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Geben Sie ggf. die Inverse an.

(c) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar? Geben Sie die inverse Matrix an.

Hinweis: Sie können die Ergebnisse in der Form λX angeben, wobei X jeweils eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen sein soll.

Ü50. (a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Geben Sie die inverse Matrix A^{-1} an.

(b) Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i > j$ gilt. Formulieren Sie ein Kriterium für die Regularität (Invertierbarkeit) einer oberen Dreiecksmatrix.

(c) Zeigen Sie, dass für die Vandermonde-Matrix $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Gleichung $\det(V_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

Ü51. (a) Zeigen Sie, dass jede Matrix höchstens eine Inverse hat.

(b) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix A die Beziehung $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.

A52. **Hausaufgabe, bitte bis 8.1.2015 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.**

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A invertierbar? Geben Sie die Inverse an.

(b)* Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in Abhängigkeit von dem Parameter $r \in \mathbb{R}$ (und von $a \in \mathbb{R}$). Führen Sie die Probe durch!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} , \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, bei der Inversen A^{-1} den Faktor $\frac{1}{a(a-1)}$ auszuklammern.

H53. In dieser Aufgabe wollen wir die Kästchenformel (Satz 8.13) beweisen. Sei dazu $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

(a) Zeigen Sie: Existieren zwei quadratische Matrizen B_1, B_2 so, dass

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ * & B_2 \end{pmatrix},$$

dann $\det(A) = \det(B_1)\det(B_2)$.

(b) Zeigen Sie mit Induktion, dass daraus die allgemeine Kästchenformel folgt.

H54. Gibt es Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit:

$$AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BB^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CC^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad DD^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Beispiele an bzw. begründen Sie, warum derartige Matrizen nicht existieren. Nutzen Sie dazu die Determinantenfunktion und deren Eigenschaften.