Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig
Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

10. Übungsblatt für die Übungen vom 5.1.-9.1.2015

Determinanten, Eigenwertprobleme

Hinweis: Ist p eine Primzahl, dann kann der Körper $\mathsf{GF}(p)$ durch $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ repräsentiert werden, also durch die Menge $\{0, \ldots, p-1\}$ mit der Addition und der Multiplikation $(\text{mod } n)$. (siehe auch Ü20 und Ü21).

Ü55. (a) Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^T)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ gilt, falls A invertierbar ist.

(iii) Es seien n ungerade und $A = -A^T$. Bestimmen Sie die Determinante von A.

Hinweis: Sie können zum Beweis die Gleichung $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$ verwenden.

(b) Beweisen Sie den Determinantenmultiplikationssatz
$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$.

Ü56. (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um eine 3×3-Matrix über $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$ zu finden, die keine Eigenwerte hat.

Ü57. (a) Es sei $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $v_1 = (1, 1)$ ein Eigenvektor von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass $\lambda_2 = 1$ ein Eigenwert von M ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $E_M(\lambda_2)$.

(b) Bestimmen Sie für die gegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times4}$ jeweils das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und eine Basis für jeden Eigenraum. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

A58. **Hausaufgabe, bitte bis 15.1.2015 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.** Berechnen Sie Eigenwerte und zugehörige Eigenräume (durch Angabe einer Basis) für die folgenden 2×2-Matrizen aus $\mathbb{K}^{2\times2}$, und zwar getrennt für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

H59. Gesucht sind alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{falls } i \neq j \end{cases} .$$

H60*. Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt *idempotent*, wenn $f \circ f = f$ gilt und er heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $f^n = c_0$ gibt (dabei bezeichne $c_0\colon V \to V$ die Abbildung, die jedes $x \in V$ auf 0 abbildet)

(a) Zeigen Sie, dass ein idempotenter Endomorphismus nur die Eigenwerte 0 und 1 haben kann und ein nilpotenter Endomorphismus nur den Eigenwert 0 haben kann.

(b) Es sei f ein Endomorphismus, der die Eigenwerte 0 und 1 und keine weiteren Eigenwerte hat. Ist f idempotent?

(c) Es sei f ein Endomorphismus, der nur den Eigenwert 0 hat. Ist f nilpotent?