TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

11. Übungsblatt für die Übungen vom 12.1.-16.1.2015

Diagonalisierung von Matrizen

Ü61. (a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $g = \mathbb{R}v$ mit $v = \binom{2}{1} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung geometrisch und überlegen Sie damit, welche Eigenwerte f hat und was die dazugehörigen Eigenräume sind. Geben Sie eine Basis $B' = (u_1, u_2)$ von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von f an.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A := M_B^B(f)$ bzgl. der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$.

(iii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D := M_{B'}^{B'}(f)$ bzgl. der Basis $B' = (u_1, u_2)$.

(iv) Berechnen Sie eine reguläre Matrix S, so dass $D = S^{-1}AS$ gilt. Ist S eindeutig bestimmt?

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die zur Einheitsmatrix $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich sind (vgl. Vorlesung 6.25).

Nach Vorlesung 9.13 haben ähnliche Matrizen die selben Eigenwerte. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt, d.h. finden Sie eine zu E nicht-ähnliche Matrix B mit $\det(B - \lambda E) = \det(E - \lambda E)$.

Ü62. Eine „Hecke" wachse in der Ebene $\mathbb{R}^2$ nach folgenden Regeln:

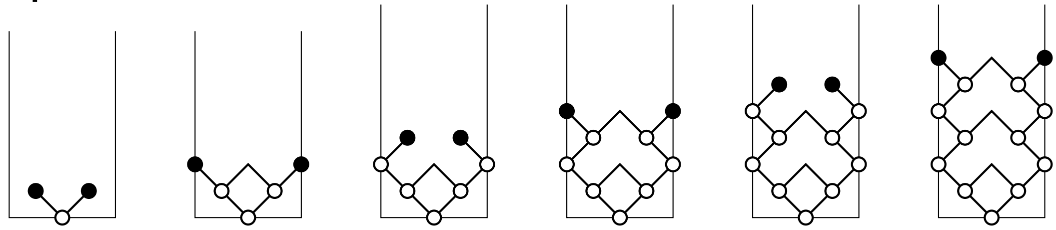
(1) Die Knospen der Hecke liegen auf Gitterpunkten $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

(2) Von einer Knospe im Punkt (x, y) wachsen im Laufe eines Jahres - falls möglich - zwei Zweige diagonal nach oben (zu den Punkten $(x-1, y+1)$ und $(x+1, y+1)$).

(3) Endet in einem Gitterpunkt genau ein Zweig, so entsteht dort eine Knospe. Falls zwei Zweige zusammenstoßen, entsteht keine Knospe.

(4) Das Heckenwachstum ist seitlich durch (unendlich hohe) Wände begrenzt, o.B.d.A. sollen die Wände an den Punkten (1,0) und $(n, 0)$ beginnen.

Beispiel: $n = 5$



1. Jahr 2. Jahr 3. Jahr 4. Jahr 5. Jahr 6. Jahr

Wir beschreiben das Wachstum der Hecke durch die Folge $b_k \in \mathsf{GF}(2)^n$, für $k = 1, 2, \ldots$, wobei $b_k := (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ durch die oberste Knospenlage im k-ten Jahr gegeben ist: $a_{ki} = 1$ falls im Punkt (i, k) eine Knospe ist (sonst $a_{ki} = 0$). Im angegebenen Beispiel etwa ist $b_0 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $b_2 = b_4 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $b_3 = b_5 = (0, 1, 0, 1, 0)$.

(a) Untersuchen Sie das Heckenwachstum für verschiedene Werte von n (speziell $n = 3, 4, 7$) und verschiedene Anfangsknospungen b_0 unter folgendem Gesichtspunkt: *Wie hoch kann die Hecke wachsen?*

(b) Finden Sie eine Matrix $A_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(2)$, so dass $b_{k+1} = A_n b_k$. Beschreiben Sie b_k durch eine Formel mit A_n und b_0.

Hinweis: Beachten Sie die Rechenregeln für Addition und Multiplikation in $\mathsf{GF}(2)$.

(c) Beweisen Sie: Für $n = 2^m - 1$ ist das charakteristische Polynom von A_n gerade $\chi_A = \lambda^n$.

Hinweis: Für $k \geq 2$ zeigt man durch Entwicklung nach der mittleren Spalte $\det(A_{2k+1} - \lambda E) = \lambda \cdot \det(A_k - \lambda E)^2$ und macht dann eine vollständige Induktion über m.

(d) Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von *Cayley-Hamilton* (Vorlesung 9.33), dass eine Hecke der Breite $n = 2^m - 1$ spätestens im n-ten Jahr nicht mehr weiter wächst.

Ü63. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist λ Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist λ auch Eigenwert von $A^\top$. Sind auch die zugehörigen Eigenräume von A und $A^\top$ gleich?

(b) Besitzt die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

A64. **Hausaufgabe, bitte bis 21.1.2015 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.** Begründen Sie, jeweils für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ob die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

H65. (a) Sogenannte „Räuber-Beute-Systeme“ können vereinfacht als diskretes dynamisches System dargestellt werden. Ein Beispiel dafür ist die gut untersuchte Beziehung zwischen Fleckenkauz und Buschratte. Seien E_k und R_k die Eulen- und die Rattenpopulation (in Tausend) zum Zeitpunkt k, dann berechnen sich die Populationen zum Zeitpunkt $k+1$ als:

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= a \cdot E_k + b \cdot R_k, \\ R_{k+1} &= c \cdot E_k + d \cdot R_k. \end{aligned}$$

Berechnen Sie für die Startwerte $s_1 = (E_0, R_0)^T = (10, 10)^T$, $s_2 = (30, 10)^T$ und $s_3 = (10, 20)^T$ die Populationen zum Zeitpunkt $k = 100$ für folgende Parameter (Hinweis: verwenden Sie Vorlesung 10.10):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ -0,4 & 1,7 \end{pmatrix} =: A \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0.5 & 1,5 \end{pmatrix} =: B$$

Hinweis: Modelle solcher „Räuber-Beute-Systeme“ sind i.A. viel komplexer, die hier beschriebene lineare Abhängigkeit kann zumindest als Basis dieser Prozesse angesehen werden.

(b) Berechnen Sie Eigenwerte und deren Eigenräume der *Schachbrettmatrix* $S_n = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (mit $n \in \mathbb{N}$), definiert durch

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i+j) \text{ ist gerade} \\ 0, & \text{falls } (i+j) \text{ ist ungerade} \end{cases}.$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist S_n diagonalisierbar?

Untersuchen Sie die Diagonalisierbarkeit nochmals für den Fall, dass der zugrundeliegende Körper $\mathsf{GF}(2)$ ist.

H66. Wir wollen für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3,3}$ möglichst effektiv

$$2A^6 - 41A^4 + 12A^3 - 21A^2 + 8A$$

berechnen. D.h., wir wollen für das Polynom $\varphi := 2x^6 - 41x^4 + 12x^3 - 21x^2 + 8x \in \mathbb{R}[x]$ die Matrix $\varphi(A)$ berechnen.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[x]$.

(b) Berechnen Sie mit Polynomdivision zwei Polynome $\psi, r \in \mathbb{R}[x]$ mit möglichst kleinem Grad, so dass $\varphi = \chi_A \cdot \psi + r$.

(c) Warum gilt $\varphi(A) = r(A)$?

(d) Bestimmen Sie $\varphi(A)$ durch Berechnung von $r(A)$.