TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

12. Übungsblatt für die Übungen vom 19.1.-23.1.2015

Euklidische Vektorräume

Ü67. (a) Betrachte den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ bezeichne. Finden Sie für $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einen Vektor $y \in \mathbb{R}^3$ so dass $\angle(x, y) = \frac{\pi}{3}$.

(b) Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an, um aus den Vektoren

$$v_1 := (0, 2, 1, 0)^T, v_2 := (1, -1, 0, 0)^T, v_3 = (1, 1, 1, 0)^T, v_4 := (1, 2, 0, -1)^T$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ zu konstruieren.

(c) Geben Sie zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^4$ an, die die Norm 1 haben und zu den Vektoren $v_1 := (2, 1, -4, 0)^T$, $v_2 := (-1, -1, 2, 2)^T$, $v_3 := (3, 2, 5, 4)^T$ orthogonal sind. Berechnen Sie zum Untervektorraum $U := \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$ das orthogonale Komplement $U^\perp$ im Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

Ü68. (a) Zeigen Sie, dass der „Satz des Pythagoras": $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ für orthogonale Vektoren u, v auch im $\mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für Vektoren u, v aus dem $\mathbb{R}^n$ $\|u + v\| = \|u - v\|$ gilt, wenn u und v orthogonal sind.

Ü69. In dieser Aufgabe wollen wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (Satz 11.5 aus der Vorlesung) beweisen. Sei dazu $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $x, y \in V$.

(a) Zeigen Sie für den Fall $y \neq 0$, dass mit $a := -\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$ die Gleichung

$$\langle x + ay, x + ay \rangle = \frac{1}{\langle y, y \rangle} \left(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \right)$$

erfüllt ist.

(b) Folgern Sie aus a) die Ungleichung $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

(c) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme von a), dass $|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ genau dann gilt, wenn x, y linear abhängig sind.

A70. **Hausaufgabe, bitte bis 28.1.2015 12.00 Uhr unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe im Briefkasten im Willers-Bau (C-Flügel) abgeben.** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis mit dem GRAM-SCHMIDTschen Orthonormalisierungsverfahren für den von den Vektoren

$$v_1 = (3, 1, -1, 3)^\top, \ v_2 = (-5, 1, 5, -7)^\top \text{ und } v_3 = (4, 4, 2, 2)^\top$$

aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$.

H71. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3,3}$ trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar ist.

H72. Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis. Weiterhin sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle u, v \rangle := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ wobei } u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

eine *Bilinearform* definiert wird.

Hinweis: Eine *Bilinearform* erfüllt die Eigenschaft (iii) aus Definition 11.1. Die Matrix A heißt *Gramsche Matrix*. Es lässt sich zeigen, dass jede Bilinearform und jedes Skalarprodukt (bezüglich jeder Basis) durch eine Gramsche Matrix beschrieben werden kann. Genauer: Ist $\langle -.- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis B, dann existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass für alle $u, v \in V$ gilt: $\langle u, v \rangle = (\iota_B^{-1}(u))^T A \iota_B^{-1}(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.