Jun.-Prof. M. Schneider, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra für Physiker, Wintersemester 2014/15

13. Übungsblatt für die Übungen vom 26.1.-30.1.2015

normale, orthogonale und selbstadjungierte Abbildungen

Ü73. Führen Sie die Hauptachsentransformation zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

durch, d.h. bestimmten Sie eine orthogonale Matrizen S, T so dass $S^\top AS$ bzw. $T^\top BT$ Diagonalmatrizen sind.

Ü74. (a) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt $\det A = 1$ oder $\det A = -1$. Finden Sie auch eine Einschränkung für die Determinante einer symmetrischen Matrix?

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Das Produkt und die Inversen orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Das Produkt und die Inversen symmetrischer Matrizen sind wieder symmetrisch.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen einen Untervektorraum im Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen bildet und bestimmen Sie dessen Dimension.

Ü75. (a) Zeigen Sie: Jede Spiegelung $s_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich einer Spiegelgerade mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ ist eine orthogonale Abbildung.

(b) Zeigen Sie: Jede Drehung $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Winkel α ist eine orthogonale Abbildung.

(c) Zeigen Sie: Jede orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung oder eine Spiegelung.

(d) Zeigen Sie: Die Menge der Drehungen und Spiegelungen bildet (mit der Hintereinanderausführung als Operation) eine Gruppe.

(e)* (Selbststudium) Führen Sie für s_α und d_α die Hauptachsentransformation durch.

H76. Zeigen Sie: Jede normale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist selbstadjungiert oder das Vielfache einer orthogonalen Abbildung (d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass λf orthogonal ist).

H77. (a) Zeigen Sie, dass die Eigenräume der Matrix B aus Aufgabe Ü57(b) orthogonal sind.

(b) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von B^3.

(c) Zeigen Sie: Ist n eine natürliche Zahl und hat die Matrix M den Eigenvektor v zum Eigenwert k, dann hat M^n den Eigenvektor v zum Eigenwert k^n.

H78. Seien $(V, \langle -, - \rangle_V)$ und $(W, \langle -, - \rangle_W)$ zwei euklidische oder unitäre Räume. Zeigen Sie, dass jede orthogonale Abbildung $f : V \to W$ injektiv ist.