

# Algebra für Informationssystemtechniker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

[www.math.tu-dresden.de/~baumann](http://www.math.tu-dresden.de/~baumann)

[Ulrike.Baumann@tu-dresden.de](mailto:Ulrike.Baumann@tu-dresden.de)

15.10.2014

## Wintersemester 2014/15

- Mengen
- Graphen
- Restklassenringe

## Sommersemester 2015

- Halbgruppen
- Gruppen
- Ringe
- Körper

- Prüfungsvorleistungen
- Modulprüfung: (90 Minuten)

Prüfungszeitraum des Sommersemesters 2015

Nach- und Wiederholungsprüfung:

Prüfungszeitraum des Wintersemesters 2015/16

# Zugelassene Hilfsmittel in Prüfungen

---

Eigene Bücher und Skripte

keine elektronischen Hilfsmittel

insbesondere kein Taschenrechner

# 1. Vorlesung

---

## Grundbegriffe zu Mengen

- Potenzmengen
- Darstellung der Teilmengenrelation im Hasse-Diagramm (Ordnungsdiagramm)
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion

# Oft verwendete Symbole (1)

Mengen der

- natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$   
 $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$
- reellen Zahlen  $\mathbb{R}$
- komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$

## Oft verwendete Symbole (2)

Symbol	Bedeutung
}	Mengenklammer auf
{	Mengenklammer zu
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$:=$	ist per Definition gleich
$=$	es wird behauptet, dass Gleichheit besteht
$\emptyset$	die leere Menge
$ M $	die Mächtigkeit der Menge $M$ ; die Anzahl der Elemente von $M$ für endliche Mengen $M$
$A \cap B$	der Durchschnitt der Mengen $A$ und $B$
$A \cup B$	die Vereinigung der Mengen $A$ und $B$
$A \setminus B$	die Differenzmenge $A$ minus $B$

# Potenzmenge

- $A$  und  $B$  seien Mengen (über derselben Grundgesamtheit).  
 $A$  heißt eine (echte) Teilmenge von  $B$ , wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist (und  $A \neq B$  gilt).

Schreibweise:  $A \subseteq B$  (bzw.  $A \subset B$ )

- $A$  und  $B$  seien Mengen (über derselben Grundgesamtheit).  
 $A$  und  $B$  heißen gleich, wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  gilt.
- Sei  $A$  eine Menge (über einer Grundgesamtheit). Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$  von  $A$  ist die Menge aller Teilmengen von  $A$ :  
$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$
- Ist  $A$  eine  $n$ -elementige Menge, dann ist  $\mathcal{P}(A)$  eine  $2^n$ -elementige Menge.



# Hasse-Diagramm (Ordnungsdiagramm)

Die Potenzmenge einer endlichen Menge  $A$  mit der Teilmengenrelation  $\subseteq$  lässt sich wie folgt darstellen:

- Zeichne Punkte für die Teilmengen von  $A$  in die Zeichenebene, so dass der Punkt für eine Menge stets höher liegt als die Punkte für ihre echten Teilmengen.  
Beschrifte mit den Namen der Teilmengen.
- Seien  $X, Y \subseteq A$ ,  $X \neq Y$ .  
Zeichne eine Linie von  $X$  nach  $Y$ , wenn  $X \subseteq Y$  gilt und es kein  $Z \subseteq A$  mit  $X \subset Z \subset Y$  gibt.

# Geordnete Menge, Ordnung

- Sei  $A$  eine Menge.  
Das Paar  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  nennt man eine geordnete Menge und die Relation  $\subseteq$  heißt Ordnung auf  $\mathcal{P}(A)$ .
- Eigenschaften von  $\subseteq$ :
  - (1) Für alle  $X \in \mathcal{P}(A)$  gilt  $X \subseteq X$ .  
(Reflexivität)
  - (2) Für alle  $X, Y \in \mathcal{P}(A)$  gilt:  
 $X \subseteq Y$  und  $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$   
(Antisymmetrie)
  - (3) Für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$  gilt:  
 $X \subseteq Y$  und  $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$   
(Transitivität)
- Zwei Elemente  $X, Y$  von  $\mathcal{P}(A)$  heißen vergleichbar, wenn  $X \subseteq Y$  oder  $Y \subseteq X$  gilt, und andernfalls unvergleichbar.

# Beweise durch vollständige Induktion

- Satz:

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $H(n)$  gegeben.

Es gelte:

(1)  $H(0)$  ist wahr.

(2)  $H(n)$  ist wahr  $\Rightarrow H(n+1)$  ist wahr  
für beliebiges festes  $n \in \mathbb{N}$

Dann ist  $H(n)$  wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) nennt man den Induktionsanfang.
- (2) nennt man den Induktionsschritt.
- In (2) nennt man  $H(n)$  die Induktionsvoraussetzung.
- Sinngemäß gilt der Satz auch für  $n \geq n_0$ .

# Beispiele

- Man kann durch vollständige Induktion beweisen, dass für die Anzahl  $\binom{n}{k}$  der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge ( $n \geq k$ ) gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

(wobei  $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ )

- Folgerung:

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$