2. Vorlesung

- (endliche schlichte ungerichtete) Graphen
  und
  Graphendiagramme

- Handschlaglemma

- Isomorphie von Graphen
  - Isomorphieproblem
  - Beispiel für eine Äquivalenzrelation
  - Spezielle Isomorphieklassen

- Anwendung von Graphen zur Modellierung

Endliche schlichte ungerichtete Graphen

- Ein endlicher schlichter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar
  aus einer Menge V, die endlich und nichtleer ist, und einer Menge E,
  die zweielementige Teilmengen von V enthält.
  V ist die Knotenmenge von G; die Elemente von V heißen Knoten.
  E ist die Kantenmenge von G; die Elemente von E heißen Kanten.

- Endliche schlichte ungerichtete Graphen werden kurz Graphen genannt.

- Graphen lassen sich durch Graphendiagramme veranschaulichen.

Handschlaglemma

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Dann wird $d_G(v) := |\{e \in E \mid v \in e\}|$ der Grad von v in G genannt.

- Lemma: (Handschlag-Lemma)

  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Isomorphie von Graphen

- Definition:

  Ein Graph G_1 heißt zu einem Graphen G_2 isomorph, wenn das Graphendiagramm von G_2 so beschriftet werden kann, dass ein Graphendiagramm von G_1 ensteht.

  Bezeichnung: $G_1 \cong G_2$

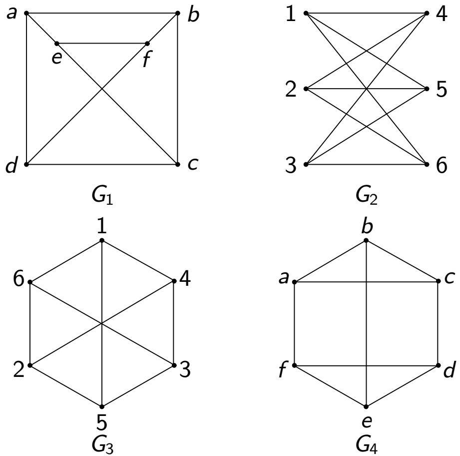
- Isomorphieproblem (für Graphen):
  Man entscheide, ob für gegebene Graphen G_1, G_2 gilt:
  $G_1 \cong G_2$

- Die Isomorphie von Graphen ist eine Äquivalenzrelation:
  $G_1 \cong G_1$ ($\cong$ ist reflexiv)
  $G_1 \cong G_2 \;\Rightarrow\; G_2 \cong G_1$ ($\cong$ ist symmetrisch)
  $G_1 \cong G_2$ und $G_2 \cong G_3 \Rightarrow\; G_1 \cong G_3$ ($\cong$ ist transitiv)

  Man spricht von zueinander isomorphen Graphen.

- Werden unbeschriftete Graphendiagramme angegeben, dann sagt man, dass die Graphen bis auf Isomorphie gegeben sind.

Beispiel



G_1 und G_2, G_1 und G_3, G_2 und G_3 sind isomorphe Graphen.

G_1, G_2, G_3 liegen in derselben Isomorphieklasse.

G_4 ist zu keinem der Graphen G_1, G_2, G_3 isomorph.

Spezielle Graphen

- Sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$,
  $E := \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ x \neq y\}$.
  $K_n := (V, E)$ heißt vollständiger Graph.

- Sei $V := V_1 \cup V_2$,
  $V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset$, $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$,
  $E := \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$.
  $K_{n_1,n_2} := (V, E)$ heißt vollständig bipartiter Graph.

- Sei $V := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $|V| = n + 1$,
  $E := \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$.
  $P_n := (V, E)$ heißt Weg der Länge n mit den Endpunkten v_0 und v_n.

- Sei $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n \geq 3$,
  $E := \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.
  $C_n := (V, E)$ heißt Kreis der Länge n.