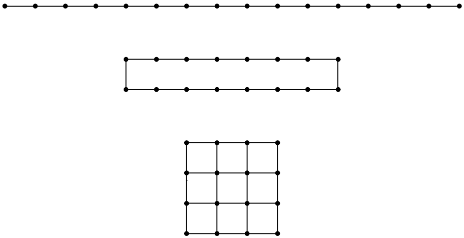
3. Vorlesung

- Beispiel: Modellierung von Netzwerken (Hypercube Q_n)
- Untergraphen, insbesondere Bäume
- Codierung von Bäumen mit dem Prüfer-Code
- Gerüste in Graphen
- Minimalgerüste (und Matroide)

Modellierung von Netzwerken

Prozessoren $p_1, p_2, \ldots, p_n$,
die untereinander kommunizieren und Teilprobleme bearbeiten können

Beispiel: $\quad n = 16$



ABER:
Abstände zwischen den Prozessoren sind zu groß,
Einfügen aller Kanten ist zu teuer.

Bipartite Graphen, Hypercube Q_n

- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartiter Graph $G(A, B)$, wenn es zwei nichtleere Teilmengen A, B von V mit $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ so gibt, dass für jedes $e \in E$ gilt:

$$e \cap A \neq \emptyset \text{ und } \; e \cap B \neq \emptyset$$

- Beispiel: n-dimensionaler Würfel Q_n $(n \geq 2)$
  - Knoten:

    $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$

  - Kanten:

    Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden.

Der n-dimensionale Würfel Q_n ist ein bipartiter Graph.

Untergraphen

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $G' := (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ heißt Untergraph von G.

- Ist ein Weg P mit den Endpunkten u, v Untergraph eines Graphen G, dann sagt man, dass u und v in G durch den Weg P verbunden sind.

- Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten u, v von G einen Weg in G gibt, der u und v verbindet.

- Ist ein Kreis C Untergraph eines Graphen G, dann sagt man, dass G einen Kreis enthält.

- Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält, heißt Baum.

Bäume

- Ein zusammenhängender kreisloser Graph ist ein Baum.
  Ein kreisloser Graph ist ein Wald.

- Jeder Graph, der nicht zusammenhängend ist, zerfällt in Komponenten (das sind maximale zusammenhängende Untergraphen).

- Die Anzahl der Bäume $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist n^{n-2}.

- Eigenschaften von Bäumen:
  (1) Jeder Baum mit Knotenanzahl $n > 1$ hat mindestens zwei Knoten vom Grad 1 (Blätter).
  (2) Jeder Baum mit Knotenanzahl n hat Kantenanzahl $n - 1$.
  (3) Jeder kreislose Graph mit Knotenanzahl n und Kantenanzahl $n - 1$ ist ein Baum.
  (4) Sind u, v zwei verschiedene Knoten in einem Baum T, dann gibt es in T genau einen Weg mit den Endpunkten u und v.

Codierung von Bäumen mit dem Prüfer-Code

Eine bijektive Abbildung von der Menge aller Bäume auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 2)$ auf die Menge aller Folgen $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ mit $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$.

(1) Baum $T = (V, E) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$

- Für $n = 2$ wird dem Baum das Nulltupel zugeordnet.
- Für $n \geq 2$ suche unter allen Knoten vom Grad 1 den kleinsten Knoten v. Ist $\{v, w\} \in E$, dann setze $a_1 := w$.
- Sei $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-2})$ der Prüfer-Code des Baumes $T - v := (V \setminus \{v\}), E \setminus \{\{v, w\}\})$.
  Dann ist $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ der Prüfer-Code des Baumes T.

(2) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \mapsto$ Baum $T = (V, E)$

- Suche das kleinste $b_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, das nicht im $(n-2)$-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ auftritt. Es bestimmt die Kante $\{b_1, a_1\}$.
- Suche das kleinste $b_2 \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b_1\}$, das nicht im $(n-3)$-Tupel $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$ auftritt.
  Es bestimmt die Kante $\{b_2, a_2\}$. Usw.
- Die Menge $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}\}$ enthält zwei Knoten, die durch eine Kante zu verbinden sind.

Gerüste

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ist ein Untergraph $T' = (V, E')$ von G ein Baum, dann nennt man ihn ein Gerüst von G.
- Ein Graph G hat ein Gerüst genau dann, wenn G zusammenhängend ist.
- Der vollständige Graph K_n hat genau n^{n-2} Gerüste.
- Die Anzahl der Gerüste in beliebigen Graphen kann man mit dem Matrix-Gerüst-Satz berechnen.