

## 5. Vorlesung

---

- natürliche Zahlen  
Axiome von PEANO
- Teiler und Primzahlen  
Fundamentalsatz der Arithmetik
- EUKLIDischer Algorithmus  
zur Berechnung von  $\text{ggT}(a, b)$
- Erweiterter EUKLIDischer Algorithmus  
zur Ermittlung einer Darstellung  $\text{ggT}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$

# Natürliche Zahlen

- Sei  $S$  eine Menge.

$S^+ := S \cup \{S\}$  nennt man Nachfolger von  $S$ .

- Ein Modell der natürlichen Zahlen:  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$   
mit

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \emptyset^+ = \{\emptyset\}$$

$$2 := \emptyset^{++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$\vdots$

- Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element (d.h. die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet).
- Folgerung: („Prinzip des kleinsten Verbechers“)  
Wenn eine Behauptung  $H(n)$  nicht für alle natürlichen Zahlen gilt, dann muss es ein kleinstes Gegenbeispiel geben.

# Axiome von Peano

- ① Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es genau eine natürliche Zahl  $n^+$ , genannt der Nachfolger von  $n$ .
- ② Aus  $m^+ = n^+$  folgt  $m = n$ , d.h. jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
- ③ Es gibt eine natürliche Zahl  $0$ , die nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl ist (d.h. es gibt keine natürliche Zahl  $n$  mit  $n^+ = 0$ ).
- ④ (Induktionsaxiom)  
Ist  $S$  eine Menge von natürlichen Zahlen, die die Zahl  $0$  enthält und für jedes  $n \in S$  auch  $n^+ \in S$  erfüllt, dann ist  $S$  die Menge aller natürlichen Zahlen.

# Teiler und Primzahlen

---

- Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ .  
 $a$  heißt Teiler von  $b$  in  $\mathbb{N}$ , wenn es ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $a \cdot k = b$  gibt.
- Eine natürliche Zahl  $p$  heißt Primzahl, wenn sie größer als 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.
- Jede natürliche Zahl  $> 1$  ist durch eine Primzahl teilbar.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- Teilt eine Primzahl ein Produkt natürlicher Zahlen, dann teilt sie einen der Faktoren.

# Fundamentalsatz der Arithmetik

- Jede natürliche Zahl  $n > 1$  kann auf genau eine Weise als ein Produkt

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

geschrieben werden, wobei  $k$  eine natürliche Zahl ist,  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  Primzahlen sind und  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  positive natürliche Zahlen sind. Diese Darstellung heißt die kanonische Darstellung von  $n$ .

- Die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ ist } \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1).$$

- Je zwei natürliche Zahlen  $a, b$  (mit  $(a, b) \neq (0, 0)$ ) besitzen einen größten gemeinsamen Teiler  $\text{ggT}(a, b)$  und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches  $\text{kgV}(a, b)$ .
- Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ . Gilt  $\text{ggT}(a, b) = 1$ , dann nennt man  $a, b$  teilerfremd (relativ prim).

# Euklidischer Algorithmus

- **Euklidischer Algorithmus** zur Berechnung von  $\text{ggT}(a, b)$  mit  $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$a = q_1 b + r_1 \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$\vdots$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + \underline{r_n} \quad \text{mit} \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \underline{r_n} \quad (\text{denn } r_n \mid a, r_n \mid b, t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid r_n)$$

- Zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  sind genau dann teilerfremd, wenn es ganze Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  mit

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b = 1$$

gibt. Die Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  können mit Hilfe des erweiterten EUKLIDISCHEN Algorithmus berechnet werden.

# Erweiterter EUKLIDISCHER Algorithmus

**Erweiterter Euklidischer Algorithmus** zur Darstellung von  $\text{ggT}(a, b)$  als Linearkombination  $\alpha \cdot a + \beta \cdot b$ :

	$a$	$b$		
$a$	1	0		$\cdot 1$
$b$	0	1		$\cdot (-q_1)$   $\cdot 1$
$r_1$	1	$-q_1$		$\cdot (-q_2)$
$r_2$	$-q_2$	$1 + q_1 q_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$r_n$	$\alpha$	$\beta$		

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$$