

10. Vorlesung

- Permutationsgruppen
- Zyklenschreibweise für Permutationen
- Darstellung von Permutationen als Produkt von Transpositionen
- Signum (Vorzeichen) von Permutationen
- Beispiel aus der Codierungstheorie

Permutationsgruppen

- Eine bijektive Abbildung einer Menge $X \neq \emptyset$ auf sich heißt Permutation auf X .

Das Produkt (die Hintereinanderausführung) \circ von Permutationen α, β auf einer Menge X ist wie folgt definiert:

$$\forall x \in X : (\alpha \circ \beta)(x) := \alpha(\beta(x))$$

($\alpha \circ \beta$ wird gelesen: α nach β)

- Mit S_X wird die Menge aller Permutationen auf X bezeichnet. Für $|X| = n$ ist $S_n := S_X$.
- (S_n, \circ) ist eine Gruppe.
- Die Gruppe (S_n, \circ) (kurz: S_n) wird symmetrische Gruppe vom Grad n genannt.
- Die Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_n heißen Permutationsgruppen.

Zyklenschreibweise für Permutationen

- Jede Permutation auf einer endlichen Menge lässt sich als Produkt disjunkter Zyklen schreiben:

- $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 6 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$

Zyklenschreibweise:

$$\alpha = (12437)(5)(6)(89) \text{ bzw.}$$

$$\alpha = (12437)(89) = (89)(12437) \in S_9.$$

$$\beta = (123)(45)(6789) \in S_9$$

- Die Berechnung des Produktes ist auch in Zyklenschreibweise möglich:

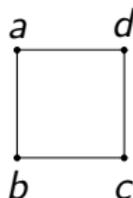
$$\alpha \circ \beta = (14532796)$$

$$\beta \circ \alpha = (13867254)$$

- Im Falle disjunkter Zyklen ist die Reihenfolge der Hintereinanderausführung vertauschbar, z.B.:

$$(12437)(89) = (12437) \circ (89) = (89) \circ (12437) = (89)(12437)$$

Symmetrieabbildungen des Quadrats



- Das Quadrat hat 8 Symmetrieabbildungen (Drehungen und Spiegelungen):

$$\text{id} \qquad \sigma := (a d)(b c)$$

$$\delta := (a b c d) \qquad \delta \circ \sigma = (b d)$$

$$\delta^2 = (a c)(b d) \qquad \delta^2 \circ \sigma = (a b)(c d)$$

$$\delta^3 = (a d c b) \qquad \delta^3 \circ \sigma = (a c)$$

- Die Symmetriegruppe des Quadrats ist eine Permutationsgruppe der Ordnung 8 (Diedergruppe D_4).

Symmetriegruppe des Quadrats

\circ	id	δ	δ^2	δ^3	σ	$\delta \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta^3 \circ \sigma$
id	id	δ	δ^2	δ^3	σ	$\delta \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta^3 \circ \sigma$
δ	δ	δ^2	δ^3	id	$\delta \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta^3 \circ \sigma$	σ
δ^2	δ^2	δ^3	id	δ	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta^3 \circ \sigma$	σ	$\delta \circ \sigma$
δ^3	δ^3	id	δ	δ^2	$\delta^3 \circ \sigma$	σ	$\delta \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$
σ	σ	$\delta^3 \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta \circ \sigma$	id	δ^3	δ^2	δ
$\delta \circ \sigma$	$\delta \circ \sigma$	σ	$\delta^3 \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	δ	id	δ^3	δ^2
$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta \circ \sigma$	σ	$\delta^3 \circ \sigma$	δ^2	δ	id	δ^3
$\delta^3 \circ \sigma$	$\delta^3 \circ \sigma$	$\delta^2 \circ \sigma$	$\delta \circ \sigma$	σ	δ^3	δ^2	δ	id

Transpositionen

- Transpositionen sind Zyklen der Länge $\ell = 2$.
- Jeder Zyklus lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Für Zyklen der Länge $\ell \geq 3$ gilt:

$$(i_1 i_2 i_3 \dots i_{\ell-1} i_\ell) = (i_1 i_\ell) \circ (i_1 i_{\ell-1}) \circ \dots \circ (i_1 i_3) \circ (i_1 i_2)$$

- Jede Permutation einer endlichen Menge kann als Produkt von Transpositionen dargestellt werden.
- Gibt es für eine Permutation α eine Darstellung als Produkt von k_1 Transpositionen und eine Darstellung als Produkt von k_2 Transpositionen, dann gilt:

$$k_1 \pmod{2} = k_2 \pmod{2}$$

Signum von Permutationen

- Jeder Permutation $\alpha \in S_n$ kann man eine Zahl $\operatorname{sgn}(\alpha) \in \{-1, 1\}$ zuordnen, das Signum (oder Vorzeichen) von α , so dass gilt:
 - $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ für jede Transposition τ .
 - $\operatorname{sgn}(\alpha \circ \beta) = \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \operatorname{sgn}(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in S_n$
- Eine Permutation heißt ungerade, falls ihr Signum -1 ist, andernfalls gerade.
- Ist $\alpha = (i_1 i_2 \dots i_\ell)$ die Zyklendarstellung der Permutation α , dann gilt $\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^{\ell-1}$.
- Eine Permutation ist genau dann gerade, wenn in ihrer Zyklendarstellung die Anzahl der Zyklen gerader Länge gerade ist.

Erzeugen der symmetrischen Gruppe S_n

- Die Transpositionen aus S_n erzeugen die Gruppe S_n .
- Die Transpositionen $(12), (13) \dots, (1n)$ erzeugen die Gruppe S_n .
- Die Transpositionen $(12), (23) \dots, (n-1n)$ erzeugen die Gruppe S_n .
- Die Transposition (12) und der Zyklus $(12 \dots n)$ erzeugen die Gruppe S_n .
- Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe A_n der symmetrischen Gruppe S_n .

A_n wird alternierende Gruppe vom Grad n genannt.

Es gilt $|A_n| = \frac{1}{2} \cdot n!$

Für $n \geq 3$ wird A_n von Zyklen der Länge 3 erzeugt.

Codierungsverfahren mit der Diedergruppe D_5

A	D	G	K	L	N	S	U	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11}$ mit $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$

Prüfgleichung: $T(a_1) * T^2(a_2) * \dots * T^{10}(a_{10}) * a_{11} = 0$ mit

$$T = (01589427)(89)$$

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	0	6	7	8	9	5
2	2	3	4	0	1	7	8	9	5	6
3	3	4	0	1	2	8	9	5	6	7
4	4	0	1	2	3	9	5	6	7	8
5	5	9	8	7	6	0	4	3	2	1
6	6	5	9	8	7	1	0	4	3	2
7	7	6	5	9	8	2	1	0	4	3
8	8	7	6	5	9	3	2	1	0	4
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0