12. Vorlesung

Ring $\longrightarrow$ kommutativer Ring $\longrightarrow$ Integritätsring $\longrightarrow$ Körper

- (kommutative) Ringe
- Nullelement und Einselement in Ringen

  Nullteiler in Ringen
- Integritätsringe und Körper
  - Jeder Körper ist ein Integritätsring.
  - Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.

Ring

Seien $+$, $\cdot$ Operationen auf einer nichtleeren Menge R. Es gelte:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in R$

(2) Es gibt ein $0 \in R$ (Nullement) mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in R$.

(3) Zu jedem $a \in R$ gibt es ein $b \in R$ mit $a + b = b + a = 0$.

(4) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in R$

(5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$

(6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ für alle $a, b, c \in R$

Dann nennt man $(R, +, \cdot)$ einen <u>Ring</u>.

Gilt zusätzlich $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$,
dann nennt man $(R; +, \cdot)$ einen <u>kommutativen Ring</u>.

Unterring, Unterringkriterium

- Definition:
  Sei $(R;+,\cdot)$ ein Ring und $\emptyset \neq S \subseteq R$.
  $(S;+,\cdot)$ wird ein Unterring von $(R;+,\cdot)$ genannt,
  wenn S mit $+$ und $\cdot$ (eingeschränkt auf S) einen Ring bildet.

- Unterring-Kriterium:
  Sei $(R;+,\cdot)$ ein Ring und $\emptyset \neq S \subseteq R$.
  $(S;+,\cdot)$ ist ein Unterring von R genau dann, wenn die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:
  (1) Für alle $a, b \in S$ gilt $a + b \in S$ und $a \cdot b \in S$.
  (2) Für jedes $a \in S$ existiert $-a \in S$.

- Für endliche Ringe genügt es, Bedingung (1) zu prüfen.

Einselement, Nullteiler

- Sei $(R; +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0.
  Ein Element $1 \in R$ mit $1 \neq 0$ und $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in R$ heißt Einselement im Ring $(R, +, \cdot)$.
  Ringe, die ein Einselement enthalten, werden Ringe mit Einselement genannt.

- Sei $(R; +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Nullelement 0.
  Für $a, b \in R \setminus \{0\}$ gelte $a \cdot b = 0$.
  Dann werden a, b Nullteiler genannt.

  Ein kommutativer Ring heißt nullteilerfrei, wenn er keine Nullteiler besitzt.

Integritätsring, Körper

- Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement.
  R heißt Integritätsring, wenn R keine Nullteiler enthält.

- Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und $a \in R$.
  Existiert ein $b \in R$ mit $a \cdot b = b \cdot a = 1$, dann wird a eine Einheit in R genannt.

- Ein kommutativer Ring mit Einselement wird Körper genannt, wenn jedes vom Nullelement verschiedene Element eine Einheit ist.

- Jeder Körper ist ein Integritätsring.

- Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper.