TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2014/15

1. Übungsblatt für die Übungen vom 20.10.-27.10.2014

Mengen

Ü1. Gegeben seien die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, & B &= \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} :\ x = 2^k\}, & D &= \{x \in \mathbb{N} \mid \mid x - 2 \mid \leq 1\}, \\ E &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } 30\}, & F &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 13\}, \\ G &= F \cap C, & H &= A \cup B \cup E. \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie die Mengen elementweise auf.

(b) Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm der geordneten Menge $(\{A, B, C, D, E, F, G, H\}, \subseteq)$.

Ü2. (a) Wieviele dreielementige Teilmengen hat eine fünfelementige Menge? Wieviel zweielementige Teilmengen hat sie?

(b) Wie viele zweielementige Teilmengen hat eine beliebige n-elementige $(n \geq 2)$ Menge? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

Ü3. (a) Beweisen Sie, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gelten:

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ (ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

A4. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\sum\limits_{i=0}^{n} z^i = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ gilt.

(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Potenzmenge einer vierelementigen Menge.

H5. Es sei $A = \{a, b\}$ sowie $B = \mathfrak{P}(A)$ und $C = \mathfrak{P}(B)$. Welche Aussagen sind wahr?

(i)	$\{a\} \in A$	(ii)	$\{a\} \in B$	(iii)	$\{a\} \in C$	(iv)	$\{\{a\}\} \subseteq B$
(v)	$\{\{a\}\} \in C$	(vi)	$\{\emptyset\} \subseteq A$	(vii)	$\{\emptyset\} \subseteq B$	(viii)	$\{\emptyset\} \subseteq C$

H6.* Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion?

Behauptung $(H(n))$: Wenn von n Mädchen eines blaue Augen hat, dann haben alle n Mädchen blaue Augen. „Beweis“:

(a) Induktionsanfang: $H(1)$ ist offenbar richtig.

(b) Induktionsschritt: $H(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, wir zeigen die Richtigkeit von $H(n+1)$: Wir betrachten $n+1$ Mädchen (bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$), von denen eins (M_1) blauäugig sein soll. Die beiden Mengen $\{M_1, \ldots, M_n\}$ und $\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ enthalten jeweils das Mädchen M_1 und besitzen je n Elemente, bestehen also nach Induktionsvoraussetzung aus lauter blauäugigen Mädchen. Da alle Mädchen in einer der Mengen vorkommen, sind also alle Mädchen blauäugig.

Hinweis: Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwerer.