TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2014/15

2. Übungsblatt für die Übungen vom 4.11.-15.11.2014

Graphen

Ü7. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *n-dimensionaler Würfel* Q_n über der Menge $M = \{1, \ldots, n\}$, falls für V und E folgendes gilt:

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{P}(M) \\ E &= \{\{A, B\} \mid A, B \subseteq M, |A \vartriangle B| = 1\} \end{aligned}$$

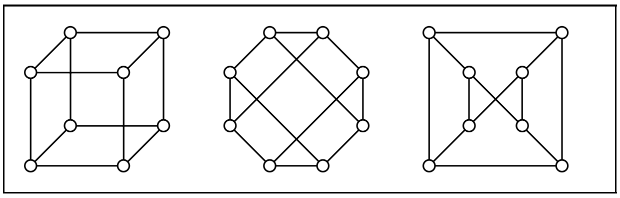
Dabei bezeichnet $\vartriangle$ die symmetrische Differenz; es gilt $A \vartriangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$.

(a) Geben Sie für alle $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Knoten- und Kantenmengen des n-dimensionalen Würfels $Q_n = (V_n, E_n)$ an und zeichnen Sie entsprechende Graphendiagramme.

(b) Wie groß sind V_n und E_n (in Abhängigkeit von n)? Beweisen Sie Ihre Vermutung, z.B. durch einen Beweis durch vollständige Induktion.

(c) Finden Sie einen Kreis in Q_3 bzw. in Q_4, der alle Knoten enthält.

(d) Untersuchen Sie, zu welchen der rechts stehenden Graphen (jeweils gegeben durch ein unbeschriftetes Graphendiagramm) Q_3 isomorph ist.



Ü8. Suchen Sie bis auf Isomorphie alle Graphen mit maximal sieben Knoten, bei denen jeder Knoten den Grad 3 hat. Begründen Sie die folgende Aussage: *Für jeden Graphen ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades eine gerade Zahl.*

Ü9. Die folgende Aufgabe stammt von Alkuin, einem Gelehrten am Hof Karls des Großen.
Ein Mann musste einen Fluss überqueren und einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl hinüberbringen. Er konnte nur ein Boot finden, dass außer ihm lediglich eine dieser drei Sachen transportieren konnte. Alles sollte aber unbeschädigt herübergebracht werden (d.h. er durfte nicht den Wolf mit der Ziege bzw. die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt lassen). Wie kann er das tun?
Hinweis: Stellen Sie die Lösung in einem Graph dar, dessen Knoten die augenblicklichen Aufenthaltsorte von Schäfer, Wolf, Ziege und Kohl repräsentieren. Kanten zwischen Knoten treten genau dann auf, wenn zwei Zustände durch eine Bootsfahrt ineinander überführbar sind.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Für zwei natürliche Zahlen $k, n \geq 1$ sei $X = \{1, 2, \ldots, 2n + k\}$ und $V = \mathfrak{P}_n(X)$, die Menge der n-elementigen Teilmengen von X. Der Graph $G_{n,k}$ besitzt V als Knotenmenge. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es disjunkte Mengen sind.

(a) Geben Sie die Knoten- und Kantenmengen der Graphen $G_{1,2}$ und $G_{2,1}$ explizit an und zeichnen Sie jeweils ein Diagramm.

(b)* Bestimmen Sie für die Graphen $G_{2,2}$ und $G_{3,1}$ die Anzahl der Knoten und Kanten, ohne ein Diagramm zu zeichnen.

H11. Bei der von der UEFA ausgetragene Europa League fand in den Spielzeiten 2004/05 bis 2008/09 eine Gruppenphase statt, bei der Gruppen von $n = 5$ Mannschaften gebildet und jede Mannschaft einmal gegen jede andere spielte. Wie viele Spieltage sind dafür mindestens zu veranschlagen? Finden Sie auch Lösungen für $n = 6$ und $n = 7$.

Hinweis: Modellieren Sie das Problem durch einen vollständigen Graphen. Die Lösung besteht aus einer Menge von Kantenpaaren, die jeweils keinen gemeinsamen Knoten haben.

H12. Welche der angegebenen Graphendiagramme stellen isomorphe Graphen dar?