Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig
Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2014/15

5. Übungsblatt für die Übungen vom 15.12.2014-9.1.2015

Teilbarkeit, Euklidischer Algorithmus

Ü25. (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Paaren (a, b) den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als Linearkombination $\mathrm{ggT}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ dar. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse!

(i) $a = 24, b = 135$, (ii) $a = 21, b = 34$ (iii) $a = 94, b = 127$, (iv) $a = 511, b = 1001$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(150, 105), 56) = \alpha \cdot 150 + \beta \cdot 105 + \gamma \cdot 56$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$.

Ü26. (a) Beweisen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{N}$ folgende Implikationen gelten:

(i) $a|b \wedge c|d \implies ac|bd$, (ii) $a|b \wedge a|c \implies a|(sb + tc)$.

(b) Beweisen Sie für beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ folgende Beziehungen:

(i) $\mathrm{ggT}(ac, bc) = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot c$

(ii) $\mathrm{ggT}(\frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}) = 1$

(iii) $b|(a \cdot c) \wedge \mathrm{ggT}(a, b) = 1 \implies b|c$

(iv) $a|c \wedge b|c \wedge \mathrm{ggT}(a, b) = 1 \implies (a \cdot b)|c$

Ü27. (a) Beweisen Sie: Die Summe der Innenwinkel eines natürlichen n-Ecks $(n > 2)$ beträgt $\pi(n - 2)$.

(b) Zeigen Sie: Hat das ganzzahlige Polynom $p(x) = x^2 + a_1x + a_0$ (d.h. es gilt $a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$) die rationalen Nullstellen c_1 und c_2, dann sind c_1 und c_2 ganze Zahlen. Wählen Sie dazu $c_1 = \frac{e}{f}$ mit $\mathrm{ggT}(e, f) = 1$ (d.h. der Bruch ist gekürzt) und beweisen Sie $f = 1$.
Hinweis: Das bedeutet, dass c_1 und c_2 entweder irrational oder Teiler von a_0 sind.

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen für alle $a, b, c, d \in \mathbb{N}$:

(i) $d|a \implies d|a \cdot b$ und (ii) $d|c,\ c|b \implies d|b$

(b) Berechnen Sie mittels des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(m, n)$ für die Zahlenpaare

(1) $n = 87$, $m = 45$ (2) $n = 150$, $m = 1001$.

und finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = a \cdot n + b \cdot m$.

H29. (a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(m, n)$ und das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(m, n)$ der beiden Zahlen $m = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und $n = 396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$. Bilden Sie die Produkte $m \cdot n$ und $\mathrm{ggT}(m, n) \cdot \mathrm{kgV}(m, n)$. Was stellen Sie fest?

(b) Beweisen Sie: Für je zwei natürliche Zahlen m, n gilt $m \cdot n = \mathrm{ggT}(m, n) \cdot \mathrm{kgV}(m, n)$.

H30. Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* (f_n) ist rekursiv definiert durch

$$f_1 = f_2 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n > 2.$$

(a) Berechnen Sie die Elemente der Folge bis f_{10}.

(b) Stellen Sie den ggT von f_9 und f_{10} sowie von f_{10} und f_{11} als Linearkombination von f_9 und f_{10} bzw. von f_{10} und f_{11} dar.

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion), dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind und insbesondere die Beziehung $(-1)^n = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n+1}$ (für alle $n > 2$) für ihre Linearkombination gilt.

(d)* Zusatzaufgabe:
Zeigen Sie die *Identität von d'Ocagne*: $\forall m, n \in \mathbb{N}^+ : (-1)^n \cdot f_{m-n} = f_m \cdot f_{n+1} - f_n \cdot f_{m+1}$.
Folgern Sie $\forall n, m \in \mathbb{N}^+ : \mathrm{ggT}(f_n, f_m) = f_{\mathrm{ggT}(n,m)}$.