



7. Übungsblatt für die Übungen vom 26.1.-6.2.2015

Eulersche Funktion, multiplikative Inverse

Ü37. (a) Berechnen Sie zu den folgenden natürlichen Zahlen n den Wert $\varphi(n)$ der Eulerschen Funktion.

$$(i) n = 30, \quad (ii) n = 60, \quad (iii) n = 100, \quad (iv) n = 2520.$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Potenzen. Benutzen Sie den Satz von Euler, falls möglich:

$$(i) 19^{289} \pmod{21}, \quad (ii) 13^{54} \pmod{32}, \quad (iii) 7^{27} \pmod{36}, \quad (iv) 15^{13} \pmod{18}.$$

(c) Zeigen Sie: Ist n eine ungerade Zahl, dann gilt $\varphi(n) = \varphi(2n)$.

Ü38. Besitzen die folgenden Elemente x ein Inverses in \mathbb{Z}_n ? Berechnen Sie ggf. das Inverse $x^{-1} \pmod{n}$.

$$(i) x = 18, n = 31, \quad (ii) x = 60, n = 257, \quad (iii) x = 511, n = 1001, \quad (iv) x = 512, n = 1001.$$

Ü39. Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an!

$$(i) 5x \equiv 1 \pmod{7} \quad (ii) 10x \equiv 9 \pmod{25} \quad (iii) 32x \equiv 14 \pmod{82}$$

Hinweis zu (iii): Es gibt eine Regel zur Modulo-Rechnung, mit deren Hilfe die Gleichung geeignet umgeformt werden kann!

H40. (a) Geben Sie alle zu 8 teilerfremden natürlichen Zahlen aus der Menge $\{0, \dots, 7\}$ an. Wie viele Zahlen in \mathbb{Z}_{80} sind zu 80 teilerfremd?

(b) Berechnen Sie - falls existent - mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus die multiplikativen Inversen zu $a = 33$, $b = 34$ und $c = 35$ in \mathbb{Z}_{80} .

(c) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $33x = 15$ in \mathbb{Z}_{80} .

(d) Gesucht ist jeweils die Anzahl der Lösungen der Gleichungen $11x = 5$ und $66x = 30$ in \mathbb{Z}_{80} .

H41. (a) Ein Fahrzeug kann durch zwei Befehle gesteuert werden: Auf den Befehl **V** hin fährt es genau 143 cm vorwärts, auf den Befehl **R** hin fährt es genau 231 cm rückwärts. Man soll das Fahrzeug durch eine Kombination dieser Befehle um genau einen Meter vorwärts bewegen, aber das erweist sich als unmöglich. Geben Sie einen Grund dafür an, finden Sie die bestmögliche Näherung, d.h. finden Sie einen Punkt, der möglichst nahe an einem Meter liegt und vom Fahrzeug erreicht werden kann und geben Sie an, wieviele Befehle **V** und **R** man kombinieren muss, um diese Näherung zu erreichen.

(b) Ein Fahrzeug auf einer Kreisbahn bewegt sich jedesmal, wenn eine Taste gedrückt wird, um genau 143 Grad weiter auf dem Kreis. Wie oft muss man die Taste drücken, damit das Fahrzeug danach genau ein Grad neben seinem Ausgangspunkt steht?

H42. Zeigen Sie, dass in \mathbb{Z}_8 jedes Element, das ein multiplikativ Inverses besitzt, invers zu sich selbst ist, dass also folgende Eigenschaft in \mathbb{Z}_8 gilt:

$$\forall x \in \mathbb{Z}_8 : x^{-1} \text{ existiert} \implies x^{-1} = x$$