TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Sommersemester 2015

9. Übungsblatt für die Übung am 28.4.2015

Halbgruppen und Gruppen

Ü49. Überprüfen Sie, ob die folgenden Verknüpfungen Halbgruppen bzw. Gruppen sind.

(a) $(\mathbb{N}, \circ)$ mit $x \circ y := x \cdot y + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

(b) $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, dabei ist $2\mathbb{Z}$ die Menge der geraden ganzen Zahlen.

(c) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \circ)$ mit $x \circ y := x \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.
Zusatz: Wenn Sie für diese Operation kein neutrales Element e finden, suchen Sie zumindest nach links- (e_l) bzw. rechtsneutralen (e_r) Elementen.

(d) $(\mathbb{Z}, \circ)$ mit $x \circ y := x + y + 2$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

(e) $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \circ)$ mit $x \circ y := xy + x + y$.
Wie lauten die Inversen von $\frac{1}{2}$ und von $\frac{3}{4}$?

Ü50. Die *prime Restklassengruppe* $\mathbb{Z}_n^*$ besteht aus allen Einheiten der Menge $\mathbb{Z}_n$ zusammen mit der Multiplikation modulo n. Stellen Sie die Gruppentafel auf und bestimmen Sie alle Untergruppen für:
(a) $n = 10$, (b) $n = 12$. (c) $n = 24$.

Ü51. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e das neutrale Element in G.

(a) Beweisen Sie die Kürzungsregeln:
$\forall\, a, b, c \in G:\ a \circ b = a \circ c \implies b = c$ und $b \circ a = c \circ a \implies b = c.$

(b) Beweisen Sie, dass für beliebige Gruppenelemente $a, b \in G$ die Gleichungen $ax = b$ bzw. $ya = b$ jeweils eine eindeutige Lösung besitzen.

(c) Durch Ü51a und Ü51b ist gezeigt: Ist G endlich, dass tritt in der Verknüpfungstafel von G jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auf. Warum?

(d) Beweisen Sie die folgenden Formeln:

$$\text{(i) } e^{-1} = e, \quad \text{(ii) } \forall a, b \in G:\ (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}, \quad \text{(iii) } \forall a \in G:\ (a^{-1})^{-1} = a.$$

A52. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Wir definieren eine „Sprache“ S auf dem Alphabet $\mathcal{A} = \{M, U\}$ durch folgende Regeln:

(MU1) MU ist ein Wort.

(MU2) Ist Mx ein Wort, dann ist auch MxU ein Wort (x steht hier für eine beliebige, auch leere, Zeichenkette).

(MU3) Sind x und y Wörter aus S, dann ist auch xy ein Wort aus S.

(MU4) Es gilt $UUU = M$.

(MU5) Es gilt $MMM = MM$.

(a) Finden Sie alle „Wörter" der Sprache (jedes Wort müssen Sie nur in einer Schreibweise angeben, z.B. $MUUU$ **oder** MM) und begründen Sie, warum keine weiteren existieren.

(b) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel von $(S, \circ)$ (die Verknüpfung $\circ$ ist die Konkatenation/Verkettung) der Wörter auf.

(c) Ist $(S, \circ)$ eine Halbgruppe? Ist $(S, \circ)$ ein Monoid? Ist $(S, \circ)$ eine Gruppe?

(d) Finden Sie eine nichttriviale Unterhalbgruppe von $(S, \circ)$.

Ersetzen Sie Regel [MU5] durch die folgende Regel

(MU5') $MUMU = MU$.

und führen Sie für die so entstehende Sprache S' die selben Untersuchungen wie für M durch.

Hinweis: In dem Buch „Gödel, Escher, Bach" von Douglas A. Hofstadter finden Sie das MU-Rätsel, welches zu dieser Aufgabe inspirierte.

H53. Füllen Sie die Operationstafeln so aus, dass eine Gruppe beschrieben wird.

Hinweise:

- Das Symbol 1 bezeichnet in (a) das neutrale Element
- Jede Zeile und jede Spalte muss jedes Element genau einmal enthalten (vgl. mit dem Spiel *sudoku*).
- Zusätzlich muss die Operation $\circ$ assoziativ sein.

(a)

$\circ$	1	2	3	4
1				
2		1		
3			1	
4				

(b)

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a			a			
b		c		f		
c						
d		e		a		
e					c	
f						c

H54. Die *Quaternionengruppe* $\underline{Q_8}$ besteht aus den Elementen $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$; die Gruppenoperation $\circ$ ist durch die folgenden Gleichungen eindeutig festgelegt:

(1) $\forall q \in Q_8 : 1 \circ q = q \circ 1 = q$

(2) $\forall q \in Q_8 : -1 \circ q = q \circ -1 = -q$

(3) $i \circ i = j \circ j = k \circ k = -1$

(4) $i \circ j = j \circ -i = k$

(5) $j \circ k = k \circ -j = i$

(6) $k \circ i = i \circ -k = j$

(7) $\forall q \in Q_8 : -(-q) = q$

(a) Bestimmen Sie $i \circ k$ und $j \circ i$; begründen Sie dabei Ihre Umformungsschritte durch die obigen Gleichungen.

(b) Stellen Sie die Gruppentafel auf.

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Quaternionengruppe.