Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig
Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Sommersemester 2015

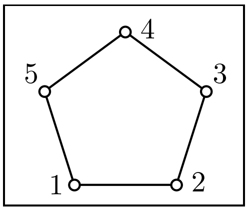
10. Übungsblatt für die Übung am 12.5.2015

Permutationsgruppen

Ü55. Gegeben sind die Permutationen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Permutationen $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^2, β^2, $\alpha^2 \circ \beta^2$, $(\alpha \circ \beta)^2$ sowie α^{-1}, β^{-1}, $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, $\beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$, $(\alpha \circ \beta)^{-1}$ und $(\beta \circ \alpha)^{-1}$ in Zyklenschreibweise.

Ü56. Welche Bewegungen der Ebene bilden ein regelmäßiges Fünfeck auf sich selbst ab? Beschreiben Sie sie durch Permutationen der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ des rechts gegebenen Fünfecks. Mit der Hintereinanderausführung bilden die Permutationen eine Gruppe, die *Diedergruppe* D_5. Stellen Sie eine Gruppentafel auf. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an.

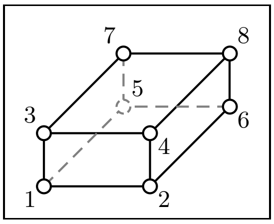


Ü57. (a) Es sei $z \in S_n$ eine Permutation, die aus einem Zyklus besteht (d.h. in Zyklendarstellung gilt $z = (a_1, \ldots, a_m)$ für $a_1, \ldots, a_m \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $m \leq n$. Wie viele Elemente hat die Untergruppe $\langle z \rangle$?

(b) Es sei $s \in S_n$ eine Permutation, die als Produkt elementfremder Zyklen $z_1, \ldots, z_n$ geschrieben werden kann. Wie viele Elemente hat die Untergruppe $\langle s \rangle$?

Begründen Sie jeweils ihre Aussagen.

A58. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Welche Bewegungen des Raums bilden einen Quader mit den Seitenlängen a, $2a$, $3a$ auf sich selbst ab? Beschreiben Sie sie durch Permutationen der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Stellen Sie eine Gruppentafel auf. Bestimmen Sie zu jedem Element sein Inverses. Geben Sie eine Untergruppe der Ordnung 2 und eine Untergruppe der Ordnung 4 an.



H59. (a) Welche der angegebenen Permutationen lassen sich durch beliebige Hintereinanderausführungen von $(abcd)$ und (ab) erzeugen?

(i) (cd) (ii) (abc) (iii) $(ac)(bd)$.

(b)* Zeigen Sie, dass sich jede Permutation γ auf $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ durch die Permutationen

$$\alpha_1 := (a_1 a_2), \alpha_2 := (a_2 a_3), \ldots, \alpha_{n-1} := (a_{n-1} a_n)$$

erzeugen lässt.
Hinweis: Damit wird sichergestellt, dass der Sortieralgorithmus *bubble sort* immer terminiert.

Zeigen Sie zuerst, dass jede Transposition, also jede Permutation der Form (a_j, a_k), $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, aus den gegebenen Permutationen erzeugt werden kann. Konstruieren Sie danach einen Algorithmus, mit dem jede Permutation auf A durch eine Hintereinanderausführung von Transpositionen erzeugt wird.

H60. Berechnen Sie zu allen Elementen σ der Diedergruppe D_5 (siehe Aufg. 58) die erzeugte Untergruppe $\langle\sigma\rangle$. Veranschaulichen Sie sich die Untergruppen als Mengen von Symmetrien eines regelmäßigen Fünfecks. Gibt es weitere (d.h. nicht einelementig erzeugte) Untergruppen in D_5?