Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Sommersemester 2015

11. Übungsblatt für die Übung am 9.6.2015

Isomorphie von Gruppen, Ringe

Ü61. Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen mit den angegebenen zwei Operationen Ringe oder sogar Körper sind:

(a) $\mathbb{Z}_6$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 6,

(b) $\mathbb{Z}_7$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 7,

(c) $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ mit $a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab$.

Ü62. (a) Bestimmen Sie im Ring aller 2×2-Matrizen

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation alle Nullteiler.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Unterring von $\underline{\mathbb{R}}^{2\times 2}$ bildet. Hat $\underline{U}$ Nullteiler? Welches sind die Einheiten von $\underline{U}$?

Ü63. (a) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, und für alle $a, b \in G$ gelte $(a * b)^2 = a^2 * b^2$.
Zeigen Sie, dass die Gruppe abelsch ist.

(b) In einer Gruppe $(G, *)$ mit neutralem Element e gelte $a * a = e$ für alle $a \in G$.
Zeigen Sie, dass die Gruppe abelsch ist.

*(c) Zeigen Sie, dass es in jeder Gruppe gerader Ordnung mindestens ein Element der Ordnung 2 gibt.

(d) Jede zyklische Gruppe ist abelsch.

A64. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Der Ring $\underline{\mathbb{Z}_2^3} := (\mathbb{Z}_2^3, \oplus, \odot)$ besitzt die Grundmenge $\mathbb{Z}_2^3 := \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$, also alle Tripel von Binärzahlen. Die Operationen $\oplus$ und $\odot$ sind die punktweise Addition bzw. Multiplikation (mod 2), es gilt also

$$\begin{aligned}(a, b, c) \oplus (d, e, f) &:= (a + d \pmod 2, b + e \pmod 2, c + f \pmod 2)\\ (a, b, c) \odot (d, e, f) &:= (a \cdot d \pmod 2, b \cdot e \pmod 2, c \cdot f \pmod 2).\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbb{Z}_2^3}$ ein Ring ist.

(b) Bestimmen Sie alle Einheiten und alle Nullteiler in $\underline{\mathbb{Z}_2^3}$. Ist $\underline{\mathbb{Z}_2^3}$ ein Integritätsring?

(c) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}_2^3, \oplus)$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_{24}^*$ (siehe Ü50) und zu der in Ü58 konstruierten Gruppe ist.

H65. (a) Beweisen Sie: Es gibt - bis auf Isomorphie - genau zwei Gruppen der Ordnung 4.

Hinweis: Stellen Sie dazu alle möglichen Operationstafeln auf überprüfen Sie deren Isomorphien.

(b) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl, dann gibt es - bis auf Isomorphie - genau eine Gruppe der Ordnung p.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass eine solche Gruppe zyklisch ist.

H66. Betrachtet wird die Potenzmenge $R := \mathcal{P}(M)$ der dreielementigen Menge $M = \{a, b, c\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R mit den Operationen

$$A+B := A \triangle B = \{x \in M \mid x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)\}, \; A \cdot B := A \cap B \quad \text{für alle } A,\, B \in R$$

einen endlichen, kommutativen Ring mit Einselement bildet.

(b) Bestimmen Sie alle Einheiten und alle Nullteiler von R.