TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften** Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Sommersemester 2015

# 12. Übungsblatt für die Übung am 23.6.2015

*Polynomringe*

Ü67. (a) Geben Sie die Menge $R$ aller Reste an, die bei Division von Elementen des Polynomrings $\mathbb{Z}_2[x]$ durch das Polynom $p(x) := x^2 + x + 1$ auftreten können.

(b) Berechnen Sie alle möglichen Summen und Produkte von Elementen der Menge $R$ modulo $p(x)$. Fassen Sie die Ergebnisse in Verknüpfungstafeln zusammen. Ist $R$ ein Ring? Ist $R$ ein Körper?

(c) Lösen Sie in $R$ die folgenden linearen Gleichungssysteme in den Unbekannten $x_1$ und $x_2$.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} 1 \cdot x_1 + x \cdot x_2 &= 1 \\ (x+1) \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= x \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} x \cdot x_1 + x \cdot x_2 &= 1 \\ (x+1) \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ü68. Berechnen Sie das Produkt und den größten gemeinsamen Teiler für die folgenden Polynome sowohl in $\mathbb{Q}[x]$ als auch in $\mathbb{Z}_2[x]$:

(a) $p_1(x) = 1 + x^4 + x^5$ und $p_2(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$,

(b) $p_3(x) = 1 + x^3 + x^5 + x^7$ und $p_4(x) = 1 + x + x^4 + x^5$.

Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2[x]$ außerdem $p_1(x) \cdot p_2(x) \pmod{x^4 + x + 1}$ und $p_3(x) \cdot p_4(x) \pmod{x^4 + x + 1}$.

Ü69. (a) Bestimmen Sie den von dem Codewort 101000 erzeugten kleinsten zyklischen $(6, k)$-Linearcode. Schreiben Sie den Code dazu als Polynomcode. Wie groß ist $k$?

(b) Gibt es weitere zyklische Codes aus $\{0, 1\}^6$, die das obige Codewort enthalten?

A70. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der Vorlesung am 30.6.2015 unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Bestimmen Sie die Menge $R$ aller Reste, die bei Division von Elementen des Polynomrings $\mathbb{Z}_2[x]$ durch das Polynom $p(x) := x^3 + x^2 + x + 1$ auftreten können. Stellen Sie (analog zu Ü67b) die Verknüpfungstafeln von $R$ bezüglich Addition und Multiplikation modulo $p(x)$ auf.

(b) Geben Sie alle Einheiten und alle Nullteiler in dem Ring an. Ist $R$ ein Körper?

(c) Geben Sie alle Unterringe von $R$ an.

H71. Berechnen Sie $(x^6 + x^2 + 1)^{-1}$ und $(x^6 + x^4 + x^3 + x^2)^{-1}$ in $\mathbb{Z}_2[x]/x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus.

H72. (a) In $\{0, 1\}^8$ soll der kleinste zyklische Linearcode bestimmt werden, der 11011000 als Codewort enthält. Schreiben Sie den Code als Polynomcode.

(b) Wie viele Codewörter gibt es?

(c) Gibt es weitere zyklische Codes aus $\{0, 1\}^8$, die das obige Codewort enthalten?