Algebra für Informationssystemtechniker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

Ulrike.Baumann@tu-dresden.de

14.10.2015

Inhalt der Vorlesung

Wintersemester 2015/16

- Mengen
- Graphen
- Restklassenringe

Sommersemester 2016

- Halbgruppen
- Gruppen
- Ringe
- Körper

Prüfung

- Prüfungsvorleistungen
- Modulprüfung: (90 Minuten)

  Prüfungszeitraum des Sommersemesters 2016

  Nach- und Wiederholungsprüfung:
  Prüfungszeitraum des Wintersemesters 2016/17

Zugelassene Hilfsmittel in Prüfungen

$\boxed{\text{Eigene Bücher und Skripte}}$

keine elektronischen Hilfsmittel

insbesondere **kein** Taschenrechner

1. Vorlesung

Grundbegiffe zu Mengen

- Potenzmengen
- Darstellung der Teilmengenrelation im Hasse-Diagramm (Ordnungsdiagramm)
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Oft verwendete Symbole (1)

Mengen der

- natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

  $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$
- ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1 - 0, 1, 2, \ldots\}$
- rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$
- reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Oft verwendete Symbole (2)

Symbol	Bedeutung
$\}$	Mengenklammer auf
$\{$	Mengenklammer zu
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$:=$	ist per Definition gleich
$=$	es wird behauptet, dass Gleichheit besteht
$\emptyset$	die leere Menge
$\lvert M \rvert$	die Mächtigkeit der Menge M;
	die Anzahl der Elemente von M für endliche Mengen M
$A \cap B$	der Durchschnitt der Mengen A und B
$A \cup B$	die Vereinigung der Mengen A und B
$A \setminus B$	die Differenzmenge A minus B

Potenzmenge

- A und B seien Mengen (über derselben Grundgesamtheit). A heißt eine (echte) Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist (und $A \neq B$ gilt).

  Schreibweise: $A \subseteq B$ (bzw. $A \subset B$)
- A und B seien Mengen (über derselben Grundgesamtheit). A und B heißen gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.
- Sei A eine Menge (über einer Grundgesamtheit). Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A ist die Menge aller Teilmengen von A:

$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$

- Ist A eine n-elementige Menge, dann ist $\mathcal{P}(A)$ eine 2^n-elementige Menge.

Hasse-Diagramm (Ordnungsdiagramm)

Die Potenzmenge einer endlichen Menge A mit der Teilmengenrelation $\subseteq$
lässt sich wie folgt darstellen:

- Zeichne Punkte für die Teilmengen von A in die Zeichenebene, so dass der Punkt für eine Menge stets höher liegt als die Punkte
  für ihre echten Teilmengen.
  Beschrifte mit den Namen der Teilmengen.
- Seien $X, Y \subseteq A$, $X \neq Y$.
  Zeichne eine Linie von X nach Y,
  wenn $X \subseteq Y$ gilt und es kein $Z \subseteq A$ mit $X \subset Z \subset Y$ gibt.

Geordnete Menge, Ordnung

- Sei A eine Menge.
  Das Paar $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nennt man eine geordnete Menge und die Relation $\subseteq$ heißt Ordnung auf $\mathcal{P}(A)$.

- Eigenschaften von $\subseteq$:
  (1) Für alle $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt $X \subseteq X$.
  (Reflexivität)
  (2) Für alle $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ gilt:
  $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X \quad \Rightarrow \quad X = Y$
  (Antisymmetrie)
  (3) Für alle $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ gilt:
  $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad X \subseteq Z$
  (Transitivität)

- Zwei Elemente X, Y von $\mathcal{P}(A)$ heißen <u>vergleichbar</u>, wenn $X \subseteq Y$ oder $Y \subseteq X$ gilt, und andernfalls <u>unvergleichbar</u>.

Beweise durch vollständige Induktion

- Satz:

  Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $H(n)$ gegeben.
  Es gelte:

  (1) $H(0)$ ist wahr.
  (2) $H(n)$ ist wahr $\Rightarrow$ $H(n+1)$ ist wahr
  für beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$

  Dann ist $H(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (1) nennt man den Induktionsanfang.

- (2) nennt man den Induktionsschritt.

- In (2) nennt man $H(n)$ die Induktionsvoraussetzung.

- Sinngemäß gilt der Satz auch für $n \geq n_0$.

Beispiele

- Man kann durch vollständige Induktion beweisen, dass für die Anzahl $\binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ($n \geq k$) gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

  (wobei $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$)

- Folgerung:

  Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$