

2. Vorlesung

- (endliche schlichte ungerichtete) Graphen und Graphendiagramme
- Handschlaglemma
- Isomorphie von Graphen
 - Isomorphieproblem
 - Beispiel für eine Äquivalenzrelation
 - Spezielle Isomorphieklassen
- Anwendung von Graphen zur Modellierung

Endliche schlichte ungerichtete Graphen

- Ein endlicher schlichter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar aus einer Menge V , die endlich und nichtleer ist, und einer Menge E , die zweielementige Teilmengen von V enthält.
 V ist die Knotenmenge von G ; die Elemente von V heißen Knoten.
 E ist die Kantenmenge von G ; die Elemente von E heißen Kanten.
- Endliche schlichte ungerichtete Graphen werden kurz Graphen genannt.
- Graphen lassen sich durch Graphendiagramme veranschaulichen.

Handschlaglemma

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Dann wird $d_G(v) := |\{e \in E \mid v \in e\}|$ der Grad von v in G genannt.
- Lemma: (Handschlag-Lemma)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Isomorphie von Graphen

- Definition:

Ein Graph G_1 heißt zu einem Graphen G_2 isomorph, wenn das Graphendiagramm von G_2 so beschriftet werden kann, dass ein Graphendiagramm von G_1 entsteht.

Bezeichnung: $G_1 \cong G_2$

- Isomorphieproblem (für Graphen):

Man entscheide, ob für gegebene Graphen G_1, G_2 gilt:

$$G_1 \cong G_2$$

- Die Isomorphie von Graphen ist eine Äquivalenzrelation:

$$G_1 \cong G_1 \quad (\cong \text{ ist reflexiv})$$

$$G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_2 \cong G_1 \quad (\cong \text{ ist symmetrisch})$$

$$G_1 \cong G_2 \text{ und } G_2 \cong G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3 \quad (\cong \text{ ist transitiv})$$

Man spricht von zueinander isomorphen Graphen.

- Werden unbeschriftete Graphendiagramme angegeben, dann sagt man, dass die Graphen bis auf Isomorphie gegeben sind.

Spezielle Graphen

- Sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$,
 $E := \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}$.
 $K_n := (V, E)$ heißt vollständiger Graph.
- Sei $V := V_1 \cup V_2$,
 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$,
 $E := \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$.
 $K_{n_1, n_2} := (V, E)$ heißt vollständig bipartiter Graph.
- Sei $V := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $|V| = n + 1$,
 $E := \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$.
 $P_n := (V, E)$ heißt Weg der Länge n mit den Endpunkten v_0 und v_n .
- Sei $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n \geq 3$,
 $E := \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.
 $C_n := (V, E)$ heißt Kreis der Länge n .