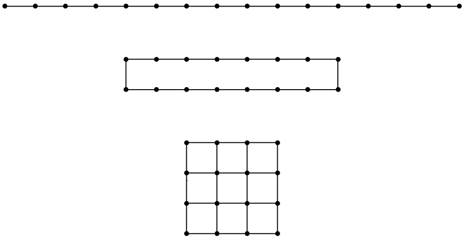
3. Vorlesung

- Beispiel: Modellierung von Netzwerken (Hypercube Q_n)
- Untergraphen, insbesondere Bäume
- Codierung von Bäumen mit dem Prüfer-Code
- Gerüste in Graphen

Modellierung von Netzwerken

Prozessoren $p_1, p_2, \ldots, p_n$,
die untereinander kommunizieren und Teilprobleme bearbeiten können

Beispiel: $n = 16$



ABER:
Abstände zwischen den Prozessoren sind zu groß,
Einfügen aller Kanten ist zu teuer.

Bipartite Graphen, Hypercube Q_n

- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartiter Graph $G(A, B)$, wenn es zwei nichtleere Teilmengen A, B von V mit $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ so gibt, dass für jedes $e \in E$ gilt:

$$e \cap A \neq \emptyset \text{ und } \; e \cap B \neq \emptyset$$

- Beispiel: n-dimensionaler Würfel Q_n $(n \geq 2)$
  - Knoten:

    $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$

  - Kanten:

    Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden.

Der n-dimensionale Würfel Q_n ist ein bipartiter Graph.

Untergraphen

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $G' := (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ heißt Untergraph von G.
- Ist ein Weg P mit den Endpunkten u, v Untergraph eines Graphen G, dann sagt man, dass u und v in G durch den Weg P verbunden sind.
- Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten u, v von G einen Weg in G gibt, der u und v verbindet.
- Ist ein Kreis C Untergraph eines Graphen G, dann sagt man, dass G einen Kreis enthält.
- Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält, heißt Baum.

Bäume

- Ein zusammenhängender kreisloser Graph ist ein Baum.
  Ein kreisloser Graph ist ein Wald.
- Jeder Graph, der nicht zusammenhängend ist, zerfällt in Komponenten (das sind maximale zusammenhängende Untergraphen).
- Die Anzahl der Bäume $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist n^{n-2}.
- Eigenschaften von Bäumen:
  (1) Jeder Baum mit Knotenanzahl $n > 1$ hat mindestens zwei Knoten vom Grad 1 (Blätter).
  (2) Jeder Baum mit Knotenanzahl n hat Kantenanzahl $n - 1$.
  (3) Jeder kreislose Graph mit Knotenanzahl n und Kantenanzahl $n - 1$ ist ein Baum.
  (4) Sind u, v zwei verschiedene Knoten in einem Baum T, dann gibt es in T genau einen Weg mit den Endpunkten u und v.

Codierung von Bäumen mit dem Prüfer-Code

Eine bijektive Abbildung von der Menge aller Bäume auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geq 2$) auf die Menge aller Folgen $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ mit $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-2$).

(1) Baum $T = (V, E) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$

- Für $n = 2$ wird dem Baum das Nulltupel zugeordnet.
- Für $n \geq 2$ suche unter allen Knoten vom Grad 1 den kleinsten Knoten v. Ist $\{v, w\} \in E$, dann setze $a_1 := w$.
- Sei $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-2})$ der Prüfer-Code des Baumes $T - v := (V \setminus \{v\}), E \setminus \{\{v, w\}\})$.
  Dann ist $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ der Prüfer-Code des Baumes T.

(2) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \mapsto$ Baum $T = (V, E)$

- Suche das kleinste $b_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, das nicht im $(n-2)$-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ auftritt. Es bestimmt die Kante $\{b_1, a_1\}$.
- Suche das kleinste $b_2 \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b_1\}$, das nicht im $(n-3)$-Tupel $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$ auftritt.
  Es bestimmt die Kante $\{b_2, a_2\}$. Usw.
- Die Menge $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}\}$ enthält zwei Knoten, die durch eine Kante zu verbinden sind.

Prüfer-Code (2)

Für jede Kante $\{b_i, a_i\}$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ wird b_i Anfangspunkt und a_i Endpunkt genannt; entsprechend wird in $\{1, \ldots, n\} \setminus \{b_1, \ldots, b_{n-2}\} = \{b_{n-1}, b_n\}$ der Knoten b_{n-1} Anfangspunkt und b_n Endpunkt genannt.

Nach Konstruktion gilt:

- Jeder Knoten ist Anfangspunkt höchstens einer Kante.
- Kein Endpunkt einer Kante ist Anfangspunkt einer früher konstruierten Kante.

Annahme: Der konstruierte Graph (n Knoten, $n-1$ Kanten) ist kein Baum.
Dann würde es einen Kreis geben, der durch Hinzufügen einer Kante e entstanden ist. Auf diesem Kreis müsste es einen Knoten geben, der Anfangspunkt der beiden mit ihm inzidierenden Kreiskanten ist.
Das ist ein Widerspruch und die Annahme ist daher falsch.
Also ist der in (2) konstruierte Graph tatsächlich ein Baum.

Gerüste

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ist ein Untergraph $T' = (V, E')$ von G ein Baum, dann nennt man ihn ein Gerüst von G.
- Ein Graph G hat ein Gerüst genau dann, wenn G zusammenhängend ist.
- Der vollständige Graph K_n hat genau n^{n-2} Gerüste.
- Die Anzahl der Gerüste in beliebigen Graphen kann man mit dem Matrix-Gerüst-Satz berechnen.