4. Vorlesung

- ebenes Graphendiagramm, planarer Graph
- EULERsche Polyederformel
- Planare Graphen
  - Charakterisierung
  - Eigenschaften
  - Beispiele
- Graphen, die nicht endlich, ungerichtet, schlicht sind
- Isomorphie von Graphen

Planarer Graph, EULERsche Polyederformel

- Definition:
  Ein Graphendiagramm, in dem sich keine Kanten kreuzen, heißt eben. Ein Graph heißt planar, wenn er ein ebenes Graphendiagramm besitzt.

- Satz (Polyederformel):
  Hat ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten ein ebenes Diagramm mit f Flächen, dann gilt:

$$n + f = m + 2$$

Eigenschaften planarer Graphen

- Der vollständige Graph K_5 und der vollständig bipartite Graph $K_{3,3}$ sind nicht planar.
- Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 und keine Unterteilung von $K_{3,3}$ als Untergraph enthält.
- Hat ein zusammenhängender Graph G mit Kantenanzahl m ein ebenes Diagramm mit f Flächen und ist C_k ein Kreis in G mit kleinstmöglicher Kantenanzahl, dann gilt:

$$k \cdot f \leq 2m$$

- Jeder planare Graph enthält einen Knoten vom Grad ≤ 5.
- Man kann effizient testen, ob ein gegebener Graph planar ist.

Graph

- Ein Graph $G = (V, E, f)$ besteht aus einer Menge V von Elementen erster Art (Knoten), einer Menge E von Elementen zweiter Art (Kanten) und einer auf E erklärten Inzidenzfunktion f, die jedem $e \in E$ eindeutig ein geordnetes oder ungeordnetes Paar zweier verschiedener Elemente $x, y \in V$ oder eine einelementige Menge zuordnet (Endpunkt(e) von e).

- Ist V endlich und E endlich, dann nennt man den Graphen $G = (V, E, f)$ einen endlichen Graphen.

- Schlingen sind Kanten mit nur einem Endpunkt. Zwei oder mehr Kanten mit demselben Paar von Endpunkten heißen Mehrfachkanten. Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten nennt man schlicht.

- Sei G ein ungerichteter Graph. Der Grad eines Knotens v in G ist die Anzahl der Kanten, die v als Endpunkt haben, wobei Schlingen doppelt zu zählen sind.

Isomorphismus

- G_1, G_2 seien ungerichtete schlichte Graphen.
  G_1 ist genau dann zu G_2 isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung von $V(G_1)$ auf $V(G_2)$ mit der Eigenschaft

  $$\{x, y\} \in E(G_1) \iff \{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E(G_2)$$

  gibt.

- G_1, G_2 seien ungerichtete Graphen, α sei eine bijektive Abbildung von $V(G_1)$ auf $V(G_2)$ und β eine bijektive Abbildung von $E(G_1)$ auf $E(G_2)$.
  Das Paar (α, β) heißt isomorphe Abbildung (Isomorphismus) von G_1 auf G_2, wenn für alle $v \in V(G_1)$ und alle $e \in E(G_1)$ gilt:

  v ist Endpunkt von e in G_1 $\iff$ $\alpha(v)$ ist Endpunkt von $\beta(e)$ in G_2

- G_1, G_2 seien ungerichtete schlichte Graphen und α eine bijektive Abbildung von $V(G_1)$ auf $V(G_2)$ mit der folgenden Eigenschaft:

  $$\{x, y\} \in E(G_1) \iff \{\alpha(x), \alpha(y)\} \in E(G_2)$$

  Dann existiert eine eindeutig bestimmte bijektive Abbildung β von $E(G_1)$ auf $E(G_2)$, so dass das Paar (α, β) eine isomorphe Abbildung von G_1 auf G_2 ist.