TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2015/16

1. Übungsblatt für die Übung am 19.10.2015

Mengen

Hinweis: Die mit einem * gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwerer.

Ü1. (a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 5\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2\} : \ x = 2^k\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{N} \mid \mid x - 2 \mid \leq 1\},$$

Schreiben Sie die Mengen elementweise auf. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm der Menge $\{A, B, C, D\}$. Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen an. Zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm der geordneten Menge $(\{A, B, C, D\}, \subseteq)$.

(b) Gegeben sind die Mengen $U_m = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq m, \ n \text{ ungerade}\}$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$. Bestimmen Sie $|\mathfrak{P}(U_m)|$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und geben Sie die Mengen $\mathfrak{P}(U_0)$, $\mathfrak{P}(U_1)$ und $\mathfrak{P}(U_6)$ konkret an. Wie sieht $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(U_1))$ aus?

(c) Zeichnen Sie Ordnungsdiagramme der Potenzmengen einer 3-elementigen, einer 4-elementigen und einer 5-elementigen Menge.

Ü2. (a) Wieviele dreielementige Teilmengen hat eine fünfelementige Menge? Wieviel zweielementige Teilmengen hat sie?

(b) Wie viele zweielementige Teilmengen hat eine beliebige n-elementige $(n \geq 2)$ Menge? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

Ü3. (a) Beweisen Sie, dass folgende Gleichungen für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gelten:

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ (ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (iii) $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$

A4. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt:

(i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2\}\}$

(ii) $|A| = |B| + 3$

(iii) $|A \cap B| = 2$

(iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid n \text{ ist gerade}\}$

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch noch nicht eindeutig festgelegt.

(1) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

(2) Wie viele Mengenpaare A,B gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen zur Lösung dieser Aufgabe die Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ nutzen.

H5*. Es sei M eine nichtleere Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Teilmengen von M mit gerader Anzahl von Elementen gleich der Anzahl der Teilmengen von M mit ungerader Anzahl von Elementen ist.

H6*. Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion?

Behauptung ($H(n)$): Wenn von n Mädchen eines blaue Augen hat, dann haben alle n Mädchen blaue Augen. „Beweis“:

(a) Induktionsanfang: $H(1)$ ist offenbar richtig.

(b) Induktionsschritt: $H(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, wir zeigen die Richtigkeit von $H(n+1)$: Wir betrachten $n + 1$ Mädchen (bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$), von denen eins ($M_1$) blauäugig sein soll. Die beiden Mengen $\{M_1, \ldots, M_n\}$ und $\{M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}\}$ enthalten jeweils das Mädchen M_1 und besitzen je n Elemente, bestehen also nach Induktionsvoraussetzung aus lauter blauäugigen Mädchen. Da alle Mädchen in einer der Mengen vorkommen, sind also alle Mädchen blauäugig.