TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2015/16

2. Übungsblatt für die Übung am 2.11.2015

Graphen

Ü7. Ein Graph $Q_n = (V_n, E_n)$ heißt n-*dimensionaler Würfel*, falls folgendes gilt:

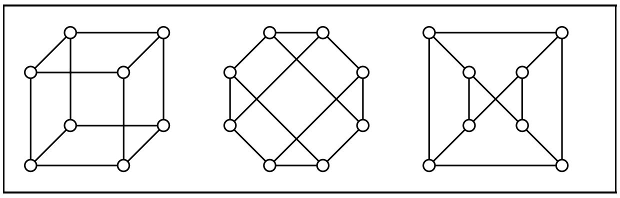
$$\begin{aligned} V &= \mathcal{P}(M_n) \qquad \text{(dabei ist } M_n = \{1, \ldots, n\}) \\ E &= \{\{A, B\} \mid A, B \subseteq M_n,\ |A \vartriangle B| = 1\} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\vartriangle$ die symmetrische Differenz; es gilt $A \vartriangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(a) Geben Sie für alle $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Knoten- und Kantenmengen des n-dimensionalen Würfels $Q_n = (V_n, E_n)$ an und zeichnen Sie entsprechende Graphendiagramme.

(b) Wie groß sind V_n und E_n (in Abhängigkeit von n)? Beweisen Sie Ihre Vermutung, z.B. durch einen Beweis durch vollständige Induktion.

(c) Untersuchen Sie, zu welchen der rechts stehenden Graphen (jeweils gegeben durch ein unbeschriftetes Graphendiagramm) Q_3 isomorph ist.



Ü8. Die folgende Aufgabe stammt von Alkuin, einem Gelehrten am Hof Karls des Großen.
Ein Mann musste einen Fluss überqueren und einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl hinüberbringen. Er konnte nur ein Boot finden, dass außer ihm lediglich eine dieser drei Sachen transportieren konnte. Alles sollte aber unbeschädigt herübergebracht werden (d.h. er durfte nicht den Wolf mit der Ziege bzw. die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt lassen). Wie kann er das tun?
Hinweis: Stellen Sie die Lösung in einem Graph dar, dessen Knoten die augenblicklichen Aufenthaltsorte von Schäfer, Wolf, Ziege und Kohl repräsentieren. Kanten zwischen Knoten treten genau dann auf, wenn zwei Zustände durch eine Bootsfahrt ineinander überführbar sind.

Ü9. Geben Sie bis auf Isomorphie alle Turnierpläne zur Modellierung eines Tischtennisturniers mit 5 Teilnehmern (siehe Vorlesung) an.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Wir definieren eine Familie von Graphen $G(n, k) = (V, E)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} V &:= \{M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \quad | \quad |M| = k\} \\ E &:= \{\{M_1, M_2\} \quad | \quad |M_1 \cap M_2| \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

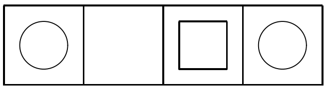
(a) Geben Sie (beschriftete) Diagramme der Graphen $G(4, 2)$ und $G(4, 3)$ an.

(b) Beweisen Sie: Im Graphen $G(n, 2)$ besitzt jeder Knoten genau $2n - 4$ Nachbarn.

H11*. In einer Werkstatt stehen 10 verschiedene Maschinen. Bekannt ist, dass jeder der 10 Arbeiter dieser Werkstatt nur an zwei Maschinen zu arbeiten vermag, während jede Maschine ihrerseits nur von zwei Arbeitern beherrscht wird. Lassen sich die Arbeiter so auf die Maschinen verteilen, dass jeder an einer Maschine zu stehen kommt, an der er auch arbeiten kann?

Hinweis: Modellieren Sie das Problem durch einen Graphen

H12. Auf dem Spielfeld, das ein Streifen aus vier nebeneinanderliegenden Quadraten ist, liegen zwei runde und ein quadratischer Spielstein jeweils in einem Feld; ein Feld bleibt leer.



In einem Spielzug darf man einen Spielstein in ein benachbartes leeres Feld schieben (2 Strafpunkte) oder über einen Spielstein in ein leeres Feld springen (1 Strafpunkt).

(a) Wie viele Spielsituationen sind möglich?

(b) Für welche Spielsituationen muss man die meisten Strafpunkte sammeln, um sie von der angegebenen aus zu erreichen?

(c) Ist es möglich, so zu ziehen, dass alle möglichen Spielsituationen genau einmal auftreten und danach zur Ausgangssituation zurückgekehrt wird?

(d) Welche Paare von Spielsituationen bringen die meisten Strafpunkte ein, wenn man von der einen zur anderen kommen will?