TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

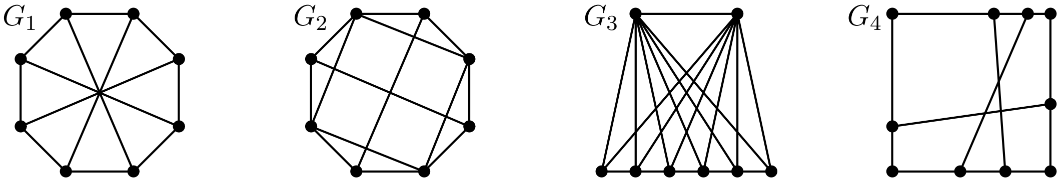
Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2015/16

4. Übungsblatt für die Übung am 30.11.2015

planare Graphen

Ü19. Welche der folgenden, durch unbeschriftete Diagramme gegebenen Graphen sind planar? Geben Sie entweder ein ebenes Diagramm an oder eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5, die der Graph als Untergraph enthält.



Beweisen Sie, dass der Graph $G(n, 2)$ (siehe Aufgabe A10) genau dann planar ist, wenn $n \leq 4$ gilt.

Ü20. Ein *platonischer Körper* im Sinne der Graphentheorie ist ein planarer Graph, bei dem alle Knoten denselben Grad $r \geq 3$ haben und alle Flächen in einem ebenen Diagramm dieselbe Anzahl $s \geq 3$ von sie begrenzenden Kanten besitzen.

(a) Das *Ikosaeder* ist ein platonischer Körper mit dem Knotengrad $r = 5$. Es besteht nur aus Dreiecken. Finden Sie eine Formel (ähnlich dem Handschlaglemma), die die Kanten- und die Flächenanzahl eines nur aus Dreiecken bestehenden Graphen in Beziehung setzt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel, des Handschlaglemmas und der gerade gefundenen Formel die Kanten-, Knoten- und Flächenanzahl des Ikosaeders. Geben Sie ein ebenes Graphendiagramm an.

(b) Finden Sie alle platonischen Körper! Prüfen Sie dazu (analog wie in Teil (a)), welche Werte von r und s eine positive Lösung für die Kantenanzahl ergeben.

Hinweis: Unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper` gibt es eine Beschreibung der platonischen Körper in geometrischem Sinne.

Ü21. (a) Beweisen Sie: Jeder planare Graph mit n Knoten besitzt höchstens $3n - 6$ Kanten.

(b) Beweisen Sie: Jeder planare Graph enthält einen Knoten vom Grad kleiner gleich 5.

(c) Beweisen Sie: Jeder zusammenhängende Graph mit n Knoten und $n - 1$ Kanten ist planar.

A22. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**
Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist der n-dimensionale Würfel Q_n planar? Begründen Sie.

H23. (a) Wie viele Kanten enthält der vollständige Graph K_n? Welchen Grad besitzt jeder Knoten?

(b) Wie viele Kreise der Länge 4 enthält der vollständige Graph K_4? Wie viele Kreise der Länge n enthält der vollständige Graph K_n?

(c) Wie viele Kanten besitzt ein vollständig bipartiter Graph $K_{m,n}$? Welche Grade haben die Knoten?

(d) Zeichnen Sie Diagramme der vollständigen bipartiten Graphen $K_{4,3}$ und $K_{4,4}$.

(e) Finden Sie für jeden Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält bzw. begründen Sie, warum ein solcher Kreis nicht existiert.

(f)* Wie viele Kreise der Länge $2n$ enthält der vollständig bipartite Graph $K_{n,n}$?

(g) Begründen Sie, dass ein bipartiter Graph $G(A, B)$ keinen Kreis der Länge 3 enthält.

H24. (a) Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge

$$V = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1\}\}$$

in dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden.

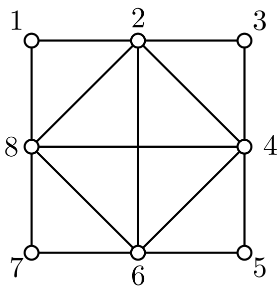
(i) Schreiben Sie die Kantenmenge von G elementweise auf.

(ii) Zeichnen Sie ein ebenes Diagramm von G.

(iii) Gesucht sind alle Bäume $T = (V_T, E_T)$, die die folgenden vier Bedingungen erfüllen:

- $V_T = V$ und $E_T \subseteq E$,
- T enthält keinen Knoten vom Grad 3,
- Der Knoten $(0, 0, 0)$ hat in T den Grad 1,
- T enthält die Kante $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$.

(b) In der nebenstehenden Abbildung ist das Diagramm eines Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ gegeben. Für den Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$ gelte:



$$V_1 = V_2 \qquad \text{und}$$
$$\{x, y\} \in E_2 \iff \{x, y\} \notin E_1 \text{ für alle } x, y \in V_2 \quad (x \neq y)$$

Zeichnen Sie ein ebenes Diagramm des Graphen G_2. Begründen Sie, dass G_1 und G_2 isomorphe Graphen sind.