TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. C. Zschalig

Algebra für Informationssystemtechniker (Modul ET - 01 04 04), Wintersemester 2015/16

5. Übungsblatt für die Übung am 14.12.2015

Teilbarkeit, Euklidischer Algorithmus

Ü25. (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Paaren (a, b) den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als ganzzahlige Linearkombination von a und b (d.h. als $\text{ggT}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) dar. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse!

(i) $a = 24, b = 135$, (ii) $a = 21, b = 34$ (iii) $a = 94, b = 127$, (iv) $a = 511, b = 1001$

(b) Berechnen Sie $\text{ggT}(\text{ggT}(150, 105), 56) = \alpha \cdot 150 + \beta \cdot 105 + \gamma \cdot 56$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass beliebige Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ die Beziehung $\text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c) = \text{ggT}(a, \text{ggT}(b, c))$ erfüllen.

Ü26. (a) Berechnen Sie die Anzahl der Teiler zu den folgenden natürlichen Zahlen und zeichnen Sie deren Teilerdiagramme.

(i) $n = 30$, (ii) $n = 100$, (iii) $n = 660$

(b) Beweisen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{N}$ folgende Implikationen gelten:

(i) $a|b \wedge c|d \implies ac|bd$, (ii) $a|b \wedge a|c \implies a|(sb + tc)$.

(c) Beweisen Sie, dass $\text{ggT}(ac, bc) = \text{ggT}(a, b) \cdot c$ für alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ gilt.

Ü27. Beweisen Sie:

(a) Jede natürliche Zahl > 1 ist durch eine Primzahl teilbar.

(b) Teilt eine Primzahl ein Produkt natürlicher Zahlen, dann teilt sie einen der Faktoren.

(c) Finden Sie die kleinste positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft

$$p|n \iff (p-1)|n \qquad \text{für alle Primzahlen } p.$$

Hinweis: Solch eine Zahl gibt es wirklich. Allerdings ist das Finden der Lösung durch pures Probieren sehr aufwendig. Falls Sie (bei 1 beginnend) pro Zahl 1 Minute zum Überprüfen brauchen, werden Sie n erst nach mehr als einem Tag finden.

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(m, n)$ und das kleinste gemeinsame Vielfache $\text{kgV}(m, n)$ der beiden Zahlen $m = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und $n = 396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$. Bilden Sie die Produkte $m \cdot n$ und $\text{ggT}(m, n) \cdot \text{kgV}(m, n)$. Was stellen Sie fest?

(b) Beweisen Sie: Für je zwei natürliche Zahlen m, n gilt $m \cdot n = \text{ggT}(m, n) \cdot \text{kgV}(m, n)$.

H29. (a) Ein Fahrzeug kann durch zwei Befehle gesteuert werden: Auf den Befehl **V** hin fährt es genau 143 cm vorwärts, auf den Befehl **R** hin fährt es genau 231 cm rückwärts. Man soll das Fahrzeug durch eine Kombination dieser Befehle um genau einen Meter vorwärts bewegen, aber das erweist sich als unmöglich. Geben Sie einen Grund dafür an, finden Sie die bestmögliche Näherung, d.h. finden Sie einen Punkt, der möglichst nahe an einem Meter liegt und vom Fahrzeug erreicht werden kann und geben Sie an, wieviele Befehle **V** und **R** man kombinieren muss, um diese Näherung zu erreichen.

(b) Ein Fahrzeug auf einer Kreisbahn bewegt sich jedesmal, wenn eine Taste gedrückt wird, um genau 143 Grad weiter auf dem Kreis. Wie oft muss man die Taste drücken, damit das Fahrzeug danach genau ein Grad neben seinem Ausgangspunkt steht?

H30. Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* (f_n) ist rekursiv definiert durch

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Elemente der Folge bis f_{10}.

(b) Stellen Sie den ggT von f_9 und f_{10} sowie von f_{10} und f_{11} als Linearkombination von f_9 und f_{10} bzw. von f_{10} und f_{11} dar.

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion), dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind und insbesondere die Beziehung $(-1)^n = f_{n-1} \cdot f_n - f_{n-2} \cdot f_{n+1}$ (für alle $n > 2$) für ihre Linearkombination gilt.

(d)* Zusatzaufgabe:
Zeigen Sie die *Identität von d'Ocagne*: $\forall m, n \in \mathbb{N}^+ : (-1)^n \cdot f_{m-n} = f_m \cdot f_{n+1} - f_n \cdot f_{m+1}$.
Folgern Sie $\forall n, m \in \mathbb{N}^+ : \mathrm{ggT}(f_n, f_m) = f_{\mathrm{ggT}(n,m)}$.