TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

1. Übungsblatt für die Übungen vom 19.-23.10.2015

Mengen und Relationen

Ü1. (a) Es werden die Mengen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 > 0\}$ und $B = \{r \in \mathbb{R} \mid -1 < r \leq 4\}$ (Kurzschreibweise $B = (-1, 4]$) als Teilmengen der Grundmenge $\mathbb{R}$ betrachtet. Geben Sie die folgenden Mengen in üblicher Mengenschreibweise an und skizzieren Sie sie:
(a) $A \cup B$ (b) $A \cap \overline{B}$ (c) $A \setminus B$ (d) $A \times B$

(b) (i) Geben Sie Beispiele von Mengen A, B, C, D an, für welche die Gleichung $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \cup D)$ verletzt ist.

(ii) Beweisen Sie, dass die Inklusion $(A \cup C) \setminus (B \cup D) \subseteq (A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ stets richtig ist. Argumentieren Sie sorgfältig!

Ü2. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R bzw. $\sim$ auf der jeweiligen Grundmenge A Äquivalenzrelationen sind. Charakterisieren Sie die Äquivalenzklassen.

(a) $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\quad R = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 1)\} \cup \Delta_A$,

(b) $A = \mathbb{R}$, $\quad x \sim y :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + 2k\pi$,

(c) $A = \mathbb{R}$, $\quad x \sim y :\iff |x - y| < \pi$,

(d) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\quad (a, b) \sim (c, d) :\iff ad = bc$.

Geben Sie zur Relation R die „Kreuztabelle“ und die zugehörige Partition/Zerlegung an.

Hinweis: Die Relation $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ bezeichnet die identische Relation auf A.

Ü3. Beweisen Sie Lemma 2 aus der Vorlesung:

(a) Für eine Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ ist die Faktormenge A/R eine *Partition bzw. Zerlegung*.

Hinweis: Eine Zerlegung $\mathcal{P} := \{A_i \mid i \in I\}$ ist eine Menge nichtleerer Teilmengen einer Menge A, so dass die Bedingungen

$$\forall i \neq j \in I : A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{und} \qquad A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

erfüllt sind. Eine Zerlegung ist also eine Menge nichtleerer Teilmengen von A, so dass jedes Element $a \in A$ in genau einer der Teilmengen enthalten ist.

(b) Für eine gegebene Partition $\mathcal{P} := \{A_i \mid i \in I\}$ von A ist

$$R_{\mathcal{P}} := \{(a, b) \in A \times A \mid \exists i \in I : \{a, b\} \subseteq A_i\}$$

eine Äquivalenzrelation.

(c) Es gilt $A/R_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ und $R_{A/R} = R$ für beliebige Zerlegungen $\mathcal{P}$ und beliebige Äquivalenzrelationen R auf einer Menge A.

Schlussfolgern Sie, dass es eine eineindeutige Beziehung zwischen Äquivalenzrelationen und Zerlegungen gibt.

A4. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 2. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen gelten. Geben Sie dazu einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Für beliebige Mengen A, B, C: $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

(ii) Für beliebige Mengen A, B: $\overline{A} \cap \overline{B \setminus A} = \overline{A \cup B}$.

(b) Geben Sie Beispiele für Relationen an, die zwei der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllen, nicht jedoch die dritte.

H5. (a) Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $A = \{a, b, c\}$ an.

(b) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. fünfelementigen Menge?

Hinweis: Sie können ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R := \{[m]_R \mid m \in M\}$ bildet eine Partition/Zerlegung von M.

H6. Es sei M eine nichtleere Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Teilmengen von M mit gerader Anzahl von Elementen gleich der Anzahl der Teilmengen von M mit ungerader Anzahl von Elementen ist.