TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

2. Übungsblatt für die Übungen vom 26.-30.10.2015

Gruppen und Körper

Ü7. (a) Geben Sie alle Elemente der symmetrischen Gruppe $Sym(3)$ an und stellen Sie die Gruppentafel auf.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der $Sym(3)$.

Ü8. (a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_+$ und ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ durch die Festsetzung

$$x \equiv y \pmod{n} :\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{Z} : x - y = \lambda n$$

eine Äquivalenzrelation $\pmod{n}$ auf der Menge $\mathbb{Z}$ definiert wird. (x, y heißen dann *kongruent modulo n*.)

Die Äquivalenzklassen $[x]$ werden auch als *Restklassen* bezeichnet. Warum?

Was ist die Anzahl der (paarweise verschiedenen) Restklassen modulo n, d.h. die Mächtigkeit von $\mathbb{Z}/_{(\mathrm{mod}\ n)}$?

(b) In der Menge $\mathbb{Z}/_{(\mathrm{mod}\ n)}$ wird durch „repräsentantenweises" Rechnen eine Addition $+$ bzw. Multiplikation $\cdot$ erklärt. Rechtfertigen Sie diese Vorgehensweise durch den Nachweis, dass sie unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten ist. (Was muss dabei gezeigt werden?)

Ü9. Stellen Sie für $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ die Tafeln für Addition $x + y := (x + y \mod n)$ und Multiplikation $x \cdot y := (x \cdot y \mod n)$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ auf. Begründen Sie (ohne detaillierten Beweis), dass $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ für $n \in \{2, 3, 5\}$ jeweils die Körpereigenschaften erfüllt.
Warum trifft das für $n = 4$ nicht zu?

A10. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 3. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{1, i, -1, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ zusammen mit der Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Gruppe bildet, in dem Sie eine Gruppentafel aufstellen. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ mit der Addition in $\mathbb{C}$ eine Gruppe bildet. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an. Ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ (mit Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$) ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

H11. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und e das neutrale Element in G.

(a) Beweisen Sie die Kürzungsregeln:
$\forall\, a, b, c \in G: \ a \circ b = a \circ c \implies b = c \quad$ und $\quad b \circ a = c \circ a \implies b = c.$

(b) Beweisen Sie, dass für beliebige Gruppenelemente $a, b \in G$ die Gleichungen $ax = b$ bzw. $ya = b$ jeweils eine eindeutige Lösung besitzen.

(c) Durch H11a und H11b ist gezeigt: Ist G endlich, dass tritt in der Verknüpfungstafel von G jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auf. Begründen Sie diese Aussage.

(d) Beweisen Sie die folgenden Formeln:

$$\text{(i) } e^{-1} = e, \quad \text{(ii) } \forall a, b \in G: \ (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}, \quad \text{(iii) } \forall a \in G: \ (a^{-1})^{-1} = a.$$

H12. (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.

(b)* Haben die Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ die gleiche Mächtigkeit? Wie könnte eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ konstruiert werden?

(c) Zeigen Sie mit (b), dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind.

Hinweis: Falls Sie für (b) auch nach reiflicher Überlegung keine Lösung finden, dann suchen Sie in der Literatur nach dem *ersten Cantorschen Diagonalargument*.