TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

3. Übungsblatt für die Übungen vom 2.-6.11.2015

Vektorräume, lineare Unabhängigkeit

Ü13. (a) Sind die folgenden Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie ihre Antwort jeweils. Skizzieren Sie die angegebenen Mengen.

(i) $\{(x,y) \mid x \cdot y \geq 0\}$, (ii) $\{(x,y) \mid x \geq 0\}$, (iii) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$,
(iv) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 0\}$, (v) $\{(x,y) \mid x-y=0\}$, (vi) $\{(x,y) \mid x-y=1\}$.

(b) Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen in einem Vektorraum V über $\mathbb{K}$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle Vektoren $u \in V$ gelten:

(i) $\lambda \cdot u = \mathbf{o} \iff \lambda = 0 \ \vee \ u = \mathbf{o}$,

(ii) $(-\lambda) \cdot (-u) = \lambda u$.

Ü14. Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen Vektorräume sind:

(a) $\left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a = b = 2c\right\} \leq \mathbb{R}^3$,

(b) $\left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^4 = 0\right\} \leq \mathbb{R}^2$,

(c) $\left\{(a+b,b^2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}\right\} \leq \mathbb{R}^2$,

(d) $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+2x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$,

(e) $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\right\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(f) $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, \exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0\right\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(g) $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, f(x_0) = 0\right\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$,

Hinweis: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist U ein Untervektorraum von V, schreiben wir $U \leq V$.

Ü15. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig? Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors an (ggf. in Abhängigkeit von den Werten $a,b,c \in \mathbb{R}$).

(a1) $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$, (a4) $\{(1,b),(c,1)\}$,
(a2) $\{(1,1,0),(2,0,2),(0,2,3)\}$, (a5) $\{(2,-1,1,1),(-3,2,-1,-3),(1,1,2,a)\}$.
(a3) $\{(1,2,3),(2,2,0),(-1,0,3)\}$,

Überprüfen Sie nochmals die Vektoren aus den Aufgabenteilen (a1) - (a4) auf lineare Unabhängigkeit, wenn der zugrundeliegende Körper nicht $\mathbb{R}$ sondern $\mathbb{Z}_5$ ist.

(b) Die Vektoren a,b,c aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum seien linear unabhängig. Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Vektoren ebenfalls linear unabhängig sind.

(b1) $-a,\ a+b+b$,

(b2) $a-b,\ b+c,\ b-c$,

(b3) $a-b,\ a-c,\ b-c$.

A16. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 4. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Wie viele Elemente besitzt der Vektorraum $\mathsf{GF}(3)^3$? Begründen Sie!

(b) Es seien $v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,1,0)$ sowie $w_1 = (2,0,1), w_2 = (0,1,2)$ Vektoren aus $\mathsf{GF}(3)^3$. Geben Sie alle Vektoren $x \in \mathsf{GF}(3)^3$ an, so dass beide Mengen $\{v_1, v_2, x\}$ und $\{w_1, w_2, x\}$ linear unabhängig sind.

(c) Es sei $u = (1,0,0)$. Bestimmen Sie $\langle\{u, v_2\}\rangle \cap \langle\{w_1, w_2\}\rangle$.

(d)* Geben Sie alle Untervektorräume an, die den Vektor u enthalten.

Hinweis: Der Vektorraum $\mathsf{GF}(3)^3$ besteht aus allen 3-Tupeln mit Einträgen aus dem dreielementigen Körper $\mathsf{GF}(3) \cong (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$. Die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar ist wie in Vektorräumen über $\mathbb{R}$ komponentenweise definiert.

H17. Sei $\mu \in \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *μ-periodisch*, wenn $f(x) = f(x + \mu)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $V_\mu := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mu\text{-periodisch}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $W := \langle\{\{\sin nx \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos mx \mid m \in \mathbb{N}\}\}\rangle$ ein Untervektorraum von $V_{2\pi}$ ist.

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, was im einzelnen bewiesen werden muss; reicht es aus, wenn man zeigt, dass $\sin nx$ und $\cos mx$ zu $V_{2\pi}$ gehören? Mit $\sin nx$ bzw. $\cos mx$ werden hier die Funktionen $x \mapsto \sin nx$ bzw. $x \mapsto \cos mx$ bezeichnet. Man nennt W auch den Vektorraum der trigonometrischen Polynome.)

(c) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten, ohne „Element von“ zu sagen. Welche der Aussagen ist richtig? (Beweis oder Widerlegung)

(c1) $\forall f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}\ \exists \mu \in \mathbb{R} : f \in V_\mu$,

(c2) $\exists \mu \in \mathbb{R}\ \forall f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : f \in V_\mu$,

(c3) $\forall \mu \in \mathbb{R} : V_\mu = V_{-\mu}$.

H18. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es sei $n \geq 2$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig, wenn (mindestens) ein Vektor v_i Linearkombination der anderen ist
(d.h. $\exists i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v_i = \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j v_j$).

(b) Ein Vektor $v \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn er der Nullvektor o ist.

(c) (siehe Vorlesung 4.2) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.

Formulieren Sie die Beweise sorgfältig!