TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig

Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

4. Übungsblatt für die Übungen vom 9.-13.11.2015

Basis und Dimension

Ü19. Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ (für geeignetes n) sind. Geben Sie ggf. eine Basis an und bestimmen Sie die Dimension.

(a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -3x_1\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1\}$

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + 1, x_2 = x_1^2\}$

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Polynomfunktionen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind. Dabei werden die aus der Schule bekannte Addition bzw. Skalarmultiplikation als Operationen verwendet. Geben Sie ggf. eine Basis an und bestimmen Sie die Dimension.

(e) $\left\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \,\middle|\, p_i \in \mathbb{R}\right\} =: \mathbb{R}[X]_{n+1}$

(f) $\left\{f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{R}[X]_{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} p_i = 0\right\}$

Ü20. (a) Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(A), \triangle, \cdot)$ zu einer beliebigen Menge A ein Vektorraum über dem Körper $\mathsf{GF}(2)$ ist. Dabei sei die Vektorraumaddition durch die symmetrische Differenz $\triangle$ und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathsf{GF}(2)$ durch $0 \cdot X := \emptyset$ und $1 \cdot X := X$ gegeben.

(b)
- Beweisen oder widerlegen Sie für den $\mathsf{GF}(2)$-Vektorraum $\mathfrak{P}(A)$ aus Aufgabe 20a die folgende Aussage: Für $B \subseteq A$ ist $\mathfrak{P}(B)$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{P}(A)$.
- Wann sind zwei Vektoren $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$ linear abhängig im Vektorraum $\mathfrak{P}(A)$?
- Es seien $X, Y \in \mathfrak{P}(A)$. Geben Sie alle Elemente von $\langle\{X, Y\}\rangle$ an. Welche Mächtigkeit hat $\langle\{X, Y\}\rangle$ in Abhängigkeit von X und Y?

(c)
- Welche Dimension hat der $\mathsf{GF}(2)$-Vektorraum $\mathfrak{P}(A)$ aus Aufgabe 20a? Geben Sie eine Basis an. Geben Sie eine weitere Basis an.
- Es seien $B_1 \subseteq A$ und $B_2 \subseteq A$. Zeigen Sie

$$\mathfrak{P}(B_1) + \mathfrak{P}(B_2) = \mathfrak{P}(B_1 \cup B_2) \quad \text{sowie} \quad \mathfrak{P}(B_1) \cap \mathfrak{P}(B_2) = \mathfrak{P}(B_1 \cap B_2)$$

  und überprüfen Sie den Dimensionssatz (VL Satz 20) mit dem erhaltenene Ergebnis.

Ü21. Beweisen Sie Satz 13 (b) (VL): Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $B \subseteq V$. Zeigen Sie:
Die Menge B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein minimales Erzeugendensystem ist (d.h. keine echte Teilmenge $B' \subset B$ ist ein Erzeugendensystem von V).

A22. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 5. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

Sei b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} v_1 &:= b_1 - 2b_2 + b_4, \\ v_2 &:= 2b_3 + 5b_4, \\ v_3 &:= -2b_1 + 4b_2 + 2b_3 + 3b_4. \end{aligned}$$

(a) Sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig?

(b) Geben Sie eine Basis für $U := \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$ an.

(c) Welche Dimension hat U?

(d) Ergänzen Sie die Basis aus (b) zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

H23. (a) Es sei $S = \langle\{(1,2,3),(1,0,0)\}\rangle \leq \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ein Komplement (vgl. VL Definition 18) T von S in $\mathbb{R}^3$. Ist T eindeutig bestimmt?

(b) Es seien U und V Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Weiter sei $U \oplus V = \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann $\dim(U) \neq \dim(V)$ gilt.

H24*. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ und der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jeweils nicht endlich dimensional sind.

Hinweis: Es bietet sich an, für $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine unendlich große Menge linear unabhängiger Vektoren zu finden (warum reicht das?) und für den $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{R}$ ein Argument mit Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit zu verwenden.