Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra
Prof. M. Bodirsky, Dr. C. Zschalig
Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Wintersemester 2015/16

5. Übungsblatt für die Übungen vom 16.-20.11.2015

Matrizenrechnung

V25. **Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.**

(a) Gegeben seien die folgenden Matrizen (über $\mathbb{R}$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit zwei Faktoren.

(b) Lösen Sie die folgende Matrizengleichungen über $\mathbb{R}$:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (ii)* $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ü26. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Geben Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese Formel für A^n durch vollständige Induktion über n.

Hinweis: Für die Formulierung der Lösung könnten z.B. *Binomialkoeffizienten* hilfreich sein.

Ü27. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Geben Sie die inverse Matrix A^{-1} an.

Ü28. (a) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$, indem Sie die Matrizen auf Stufenform bringen:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ kann als Element von $\mathbb{K}^{3\times 3}$ für verschiedene Körper $\mathbb{K}$ betrachtet werden. Berechnen Sie den Rang von A für die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(3)$ sowie $\mathbb{K} = \mathsf{GF}(5)$.

A29. **Hausaufgabe, bitte zu Beginn der 6. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnr. und Übungsgruppe abgeben.**

(a) Begründen Sie, dass (für einen Körper $\mathbb{K}$) $\mathbb{K}^{m\times n}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Geben Sie eine Basis B an und bestimmen Sie seine Dimension.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ genau dann mit allen Matrizen $C \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ kommutiert (d.h. es gilt $AC = CA$), wenn $A = kE_2$ für ein $k \in \mathbb{K}$ gilt.

Hinweis: Multiplizieren Sie dazu z.B. A nacheinander von links und von rechts mit allen Elementen der Basis B aus (a).

(c)* Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann mit allen Matrizen $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutiert, wenn $A = kE_n$ (für ein $k \in \mathbb{K}$) gilt.

H30. (a) Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle $n \times n$-Matrizen ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) über $\mathbb{R}$? Geben Sie jeweils einen Beweis an oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $A^2 + B^2 = 0 \;\Rightarrow\; A = B = 0$

(iii) $BA = 0 \;\Rightarrow\; (AB)^2 = 0$

(b) Es seien A eine $m \times r$-Matrix und B eine $r \times n$-Matrix (das Matrixprodukt AB ist also definiert).

(i) Die dritte Spalte von B sei gleich der Summe der beiden ersten Spalten. Was lässt sich über die dritte Spalte von AB sagen? Warum?

(ii) Die zweite Spalte von B bestehe nur aus Nullen. Was lässt sich über die zweite Spalte von AB sagen? Warum?

H31. Beweisen Sie VL Proposition 24: Seien A, B, C Matrizen über dem selben Körper $\mathbb{K}$, so dass die untenstehenden Summen und Produkte jeweils definiert sind. Dann gelten:

(a)* Assoziativität: $(AB)C = A(BC)$

(b) Die Einheitsmatrizen $E_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind neutrale Elemente der Multiplikation.

(c) Distributivität: $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$.